

# Metoda konečných prvků, fluid-structure interactions, ALE metoda a stabilizace

## Základní myšlenka, stabilizace MKP a ALE metoda

P. Sváček

COMSOL meeting, 25.5. 2017

# Metoda konečných prvků

## Osnova

- ▶ Úvod:
- ▶ 1. Principy MKP
  - ▶ Jak se vyvíjela MKP ?
  - ▶ Jak použít MKP na jednoduchý problém?
  - ▶ Jaké chyby děláme v MKP?
- ▶ 2. Aproximace FSI problému pomocí MKP
  - ▶ MKP pro aproximaci nestlačitelného proudění
  - ▶ Stabilizace MKP
  - ▶ ALE metoda
- ▶ 3. Závěr

# Část I. Principy MKP



## VARIATIONAL METHODS FOR THE SOLUTION OF PROBLEMS OF EQUILIBRIUM AND VIBRATIONS

R. COURANT

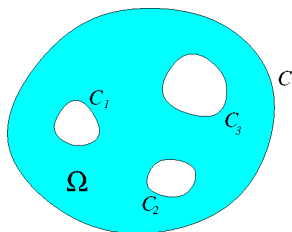
As Henri Poincaré once remarked, “solution of a mathematical problem” is a phrase of indefinite meaning. Pure mathematicians sometimes are satisfied with showing that the non-existence of a solution implies a logical contradiction, while engineers might consider a numerical result as the only reasonable goal. Such one sided views seem to reflect human limitations rather than objective values. In itself mathematics is an indivisible organism uniting theoretical contemplation and active application.

This address will deal with a topic in which such a synthesis of theoretical and applied mathematics has become particularly convincing. Since Gauss and W. Thompson, the equivalence between boundary value problems of partial differential equations on the one hand and problems of the calculus of variations on the other hand has been a central point in analysis. At first, the theoretical interest in existence proofs dominated and only much later were practical applications considered by American physicists Lord Rayleigh and



- ▶ Počátky metody *Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibration*, R. Courant, 1943, 1-23.
- ▶ Appendix “Numerical treatment of the plane torsion problem of multiply-connected domain”.
- ▶ G. Leibniz (1646 - 1716): po částech lineární aproximace.
- ▶ použitelné aproximace je možné získat bez užití infinitesimálních elementů

## Jakým problémem se vlastně R. L. Courant zabýval ?



*Variational formulation of the torsion problem: Find a function  $\phi = u$  having piecewise continuous first derivatives such that*

$$D(\phi) = \iint_{\Omega} [(\phi_x^2 + \phi_y^2) + 2\phi] \, dx dy$$

*attains its least value for  $\phi = u$ .*

*Cíl: the "total stiffness"  $S$  of the column with respect to torsion is given*

$$S = - \iint_{\Omega} u \, dx dy$$

# Jakým problémem se vlastně R. L. Courant zabýval ?

Postup řešení

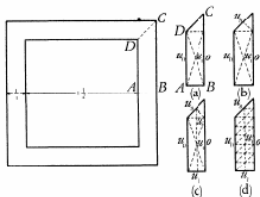


FIG. 2

Integrál

$$D(\phi) = \iint_{\Omega} [(\phi_x^2 + \phi_y^2) + 2\phi] \, dx dy$$

zapišeme

$$D(\phi) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \iint_K [(\phi_x^2 + \phi_y^2) + 2\phi] \, dx dy$$

uvažujeme  $\phi$  - lineární na každém trojúhelníku!

# Jak použít MKP na jednoduchý problém?

Hledáme  $u$  tak aby

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad (1)$$

a navíc

$$\begin{aligned} u(x) &= 0 & \text{pro } x \in \Gamma_1, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} &= \psi & \text{pro } x \in \Gamma_2. \end{aligned} \quad (2)$$

# Jak získat jeho variační formulaci?

Greenova věta (1828)

Greenova věta

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, dx = \int_{\partial\Omega} u v n_i \, dS - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx$$

pro  $u := \frac{\partial u}{\partial x_i}$



# Jak získat jeho variační formulaci?

Greenova věta (1828)

dostaneme

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} v \, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v n_i \, dS - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx$$

sečteme pro  $i = 1, 2$

# Jak získat jeho variační formulaci?

Greenova věta (1828)

$$\int_{\Omega} (\Delta u) v \, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, dS - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

## Jak získat variační formulaci?

$$\begin{array}{ll} -\Delta u = f & \text{v } \Omega \\ u = 0 & \text{na } \Gamma_1, \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \psi \quad \text{na } \Gamma_2. \end{array}$$

Greenovy věta

$$\int_{\Omega} (-\Delta u)v \, dx = \int_{\Omega} fv \, dx$$

**Postup:** integrace  $\int_{\Omega}$  převedu na lokální  $\int_K$

## Jak získat variační formulaci?

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{v } \Omega \\ u &= 0 && \text{na } \Gamma_1, \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \psi && \text{na } \Gamma_2. \end{aligned}$$

Greenovy věta

$$-\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v \, dS + \int_{\Omega} (u_x v_x + u_y v_y) \, dx = \int_{\Omega} (-\Delta u) v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx$$

**Postup:** integrace  $\int_{\Omega}$  převedu na lokální  $\int_K$

# Jak získat variační formulaci?

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{v } \Omega \\ u &= 0 && \text{na } \Gamma_1, \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \psi && \text{na } \Gamma_2. \end{aligned}$$

Greenovy věta

$$-\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v \, dS + \int_{\Omega} (u_x v_x + u_y v_y) \, dx = \int_{\Omega} (-\Delta u) v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx$$

tedy:  $u \in V$  tak aby pro libovolné  $v \in V$  platilo

$$\underbrace{\int_{\Omega} (u_x v_x + u_y v_y) \, dx}_{a(u,v)} = \underbrace{\int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma_2} \psi v \, dS}_{L(v)}$$

**Postup:** integrace  $\int_{\Omega}$  převedu na lokální  $\int_K$

# Variační formulace a diskrétní problém

**Variační formulace:** Hledáme  $u \in V$  tak aby

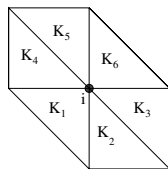
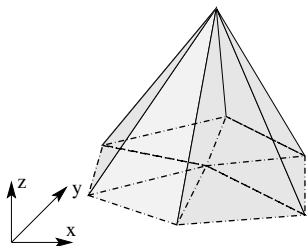
$$a(u, v) = L(v) \quad \text{pro všechna } v \in V.$$

**Diskrétní problém:** Hledáme  $u_h \in V_h$  tak aby

$$a(u_h, v_h) = L(v_h) \quad \text{pro všechna } v_h \in V_h \subset V$$

**Prostor:**  $V_h$  - po částech lineární funkce (MKP prostor  $P_1$ , dimenze)

**Báze:**  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$



# Diskrétní problém

Báze  $V_h$ :  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$

$$a(u_h, v_h) = L(v_h) \quad \text{for all } v_h \in V_h. \quad (3)$$

Volbou

$$v_h(x) = \varphi_i(x), \quad u_h(x) = \sum_j U_j \varphi_j(x)$$

Vede na soustavu rovnic

$$\sum_j \underbrace{a(\varphi_j, \varphi_i)}_{a_{ij}} U_j = \underbrace{L(\varphi_i)}_{b_i}$$

tedy soustavu

$$\mathbb{A} \vec{U} = b.$$

# Sestavení matice tuhosti

Soustava

$$\mathbb{A}\vec{U} = b.$$

kde

$$a_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i) = \iint_{\Omega} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} dx dy$$

je-li  $\Omega = \cup_{K \in \mathcal{T}_h} K$ , pak

$$a_{ij} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \underbrace{\iint_K \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} dx dy}_{a_{ij}^K}.$$

Výpočet  $a_{ij}^K$  - je jednoduchý! Pravá strana obdobně.

**Lze zobecnit!**



# Další vývoj MKP

J.T. Oden, 1991: *The finite element method was first conceived in a paper by Courant [1943], but the importance of this contribution was ignored at that time. Then the engineers independently re-invented the method in the early fifties.*

- ▶ Hrennikoff (1941), McHenry (1943) - rovinné pružnosti ("finite pieces"),
- ▶ Argyris, 1954 - variační principy a sestavení globální matice z lokálních matic (Kron)
- ▶ Turner, Clough, Martin, Topp [1956] - užívali lokální aproximace a "assembly strategies".
- ▶ jméno "finite element method" bylo užito poprvé až v roce 1960 (Clough, 1960).

# Matematické základy MKP

Užití metody konečných prvků vedlo k celé řadě otázek:

- ▶ Jak “daleko” je spočtené přibližné řešení od přesného ?  
Konvergují k přesnému ?
- ▶ Lze odhadnout chybu, které se dopustíme ?
- ▶ Jaké vlastnosti má vůbec přesné řešení ? **Existuje? Je jediné?**

# Matematické základy MKP

*J.T. Oden, 1991: "One unfamiliar with aspects of the history of finite elements may be led to the erroneous conclusion that the method of finite elements emerged from the growing wealth of information on partial differential equations"*

Vývoj matematické teorie MKP začal až na konci 60. let

- ▶ Cea's lemma (Cea [1964])
- ▶ a priori error estimates for plane elasticity problem, Johnson and McLay, 1968.
- ▶ Zlámal, 1968 - detailed analysis of interpolation properties
- ▶ Ciarlet, 1968 - proof of convergence of piecewise linear finite element approximation.
- ▶ 1972 Babuška, Aziz - mathematical foundations of finite element methods: theory of Sobolev spaces and elliptic problems, approximation theory
- ▶ Brezzi, Babuška, Aziz, 1974, 1972 - "INF-SUP" condition
- ▶ Strang, 1972 - "variational crimes"

# Matematické základy MKP

- ▶ Cea's lemma (1964)

$$\|u - u_h\| \leq C \|u - v_h\|$$

- ▶ existence řešení Lax-Milgram (1954)  $V$  - Banach. prostor

$$a(u, v) = L(v)$$

- ▶  $V$  - Sobolevův prostor,  $V = W^{1,2}(\Omega)$ , S. Sobolev (1908 - 1989)

$$\|\phi\|^2 = \iint_{\Omega} (\phi_x^2 + \phi_y^2) + \phi^2 \, dx dy$$

- ▶ Konvergence MKP ( $h \rightarrow 0$ , Ciarlet, 1968), předpoklad

$$h_K / \rho_K \leq C$$

- ▶ Odhad chyby (komentář!)

$$\|u - v_h\|_V \leq C_1 h \|u\|_{W^{2,2}(\Omega)}$$

# Zdroje chyb ve výpočtech

Jaké chyby děláme ve výpočtech MKP?

- ▶ Numerické chyby.
  - ▶ chyba aproximace (volba sítě),
  - ▶ numerická integrace,  $\Omega_h \neq \Omega$  (variační zločiny),
  - ▶ soustava lineárních/nelineárních rovnic (nepřesné řešení)
  - ▶ zaokrouhlovací chyby,

# Zdroje chyb ve výpočtech

Jaké chyby děláme ve výpočtech MKP?

- ▶ Numerické chyby.
  - ▶ chyba aproximace (volba sítě),
  - ▶ numerická integrace,  $\Omega_h \neq \Omega$  (variační zločiny),
  - ▶ soustava lineárních/nelineárních rovnic (nepřesné řešení)
  - ▶ zaokrouhlovací chyby,
- ▶ Chyby v datech (nejistoty)

# Zdroje chyb ve výpočtech

Jaké chyby děláme ve výpočtech MKP?

- ▶ Numerické chyby.
  - ▶ chyba aproximace (volba sítě),
  - ▶ numerická integrace,  $\Omega_h \neq \Omega$  (variační zločiny),
  - ▶ soustava lineárních/nelineárních rovnic (nepřesné řešení)
  - ▶ zaokrouhlovací chyby,
- ▶ Chyby v datech (nejistoty)
- ▶ Chyby v důsledku užití nesprávného matematického modelu.

REALITA → MATEMATICKÝ MODEL → NUMERICKÁ APROX.

# Zdroje chyb ve výpočtech

Jaké chyby děláme ve výpočtech MKP?

- ▶ Numerické chyby.
  - ▶ chyba aproximace (volba sítě),
  - ▶ numerická integrace,  $\Omega_h \neq \Omega$  (variační zločiny),
  - ▶ soustava lineárních/nelineárních rovnic (nepřesné řešení)
  - ▶ zaokrouhlovací chyby,
- ▶ Chyby v datech (nejistoty)
- ▶ Chyby v důsledku užití nesprávného matematického modelu.

REALITA → MATEMATICKÝ MODEL → NUMERICKÁ APROX.

- ▶ Chybné výsledky mohou vést ke katastrofálním důsledkům.



# Seznam inženýrských katastrof

Inspirováno I. Babuška

- ▶ Tacoma Narrows Bridge Nov. 7, 1940  
**Důvod:** chybný model, aerodynamické síly

# Seznam inženýrských katastrof

Inspirováno I. Babuška

- ▶ Tacoma Narrows Bridge Nov. 7, 1940  
**Důvod:** chybný model, aerodynamické síly
- ▶ Chladicí věže Ferrybridge, Yorkshire, Nov 1st, 1965  
**Důvod:** uvažovaný model nebral v úvahu seskupení věží

# Seznam inženýrských katastrof

Inspirováno I. Babuška

- ▶ Tacoma Narrows Bridge Nov. 7, 1940  
**Důvod:** chybný model, aerodynamické síly
- ▶ Chladicí věže Ferrybridge, Yorkshire, Nov 1st, 1965  
**Důvod:** uvažovaný model nebral v úvahu seskupení věží
- ▶ Sleipner A (Offshore) platform, 23 August 1991  
**Důvod:** nepřesná aproximace, chyba v predikovaném napětí.

# Seznam inženýrských katastrof

Inspirováno I. Babuška

- ▶ Tacoma Narrows Bridge Nov. 7, 1940  
**Důvod:** chybný model, aerodynamické síly
- ▶ Chladicí věže Ferrybridge, Yorkshire, Nov 1st, 1965  
**Důvod:** uvažovaný model nebral v úvahu seskupení věží
- ▶ Sleipner A (Offshore) platform, 23 August 1991  
**Důvod:** nepřesná aproximace, chyba v predikovaném napětí.
- ▶ Selhání ARIANE 5, červen 1996  
**Důvod:** round-off error, computer science problem.

# Seznam inženýrských katastrof

Inspirováno I. Babuška

- ▶ Tacoma Narrows Bridge Nov. 7, 1940  
**Důvod:** chybný model, aerodynamické síly
- ▶ Chladicí věže Ferrybridge, Yorkshire, Nov 1st, 1965  
**Důvod:** uvažovaný model nebral v úvahu seskupení věží
- ▶ Sleipner A (Offshore) platform, 23 August 1991  
**Důvod:** nepřesná aproximace, chyba v predikovaném napětí.
- ▶ Selhání ARIANE 5, červen 1996  
**Důvod:** round-off error, computer science problem.
- ▶ Mars Surveyor '98  
**Důvod:** Nezamýšlená záměna fyzikálních jednotek.

# Závěr

## Zdroje chyb ve výpočtech

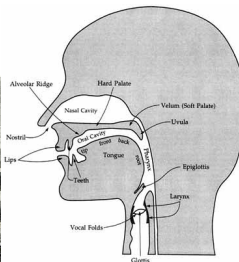
Chyby ve výpočtech mohou způsobit katastrofální důsledky. Chyby např.

- ▶ Numerické chyby.
- ▶ Chyby v datech (nejistoty)
- ▶ Chyby v důsledku užití nesprávného matematického modelu.

REALITA → MATEMATICKÝ MODEL → NUMERICKÁ APROX.

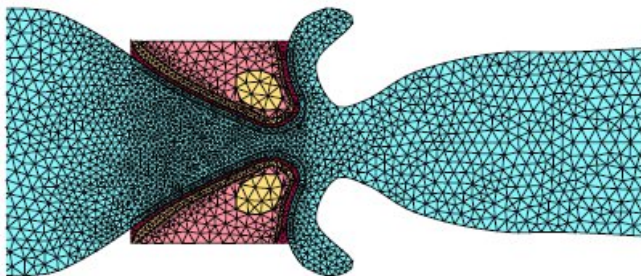
**Procesy: Verifikace a validace.**

# Část II. Problémy FSI



- ▶ ALE metoda
- ▶ stabilizace

# Matematický model FSI interakce



- ▶ proudění vzduchu (malá  $Ma$ , nestlačitelné Navier-Stokes rovnice)
- ▶ model poddajného tělesa (e.g. linear elasticity)
- ▶ coupling conditions (sdružený problém)



# Matematický model 2D

## Nestlačitelné Navier-Stokesovy rovnice

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla p - \nu \Delta \mathbf{v} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \quad \text{in } \Omega_t\end{aligned}$$

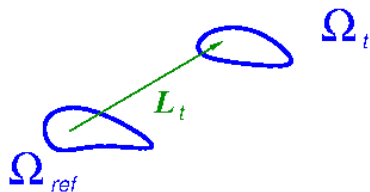
## Deformace hliníku (lineární elasticita)

$$\rho^b \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \frac{\partial \tau_{ij}^b}{\partial x_j} = f_i, \quad \text{in } \Omega^b, \quad (4)$$

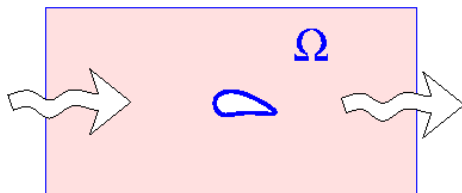
- ▶ Pozor: Lagrangeovský a Eulerovský popis !
- ▶ coupling conditions (kinematické a dynamické)
- ▶ **Arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) metoda**

# Lagrangeův a Eulerův přístup

Eulerovský přístup (fluid) vs Lagrangeovský přístup (structure)

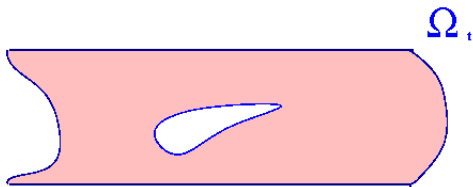


**Lagrangian approach**

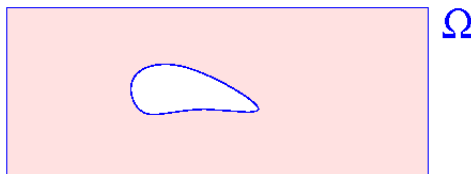


**Eulerian approach**

# Arbitrary Lagrangian-Eulerian metoda

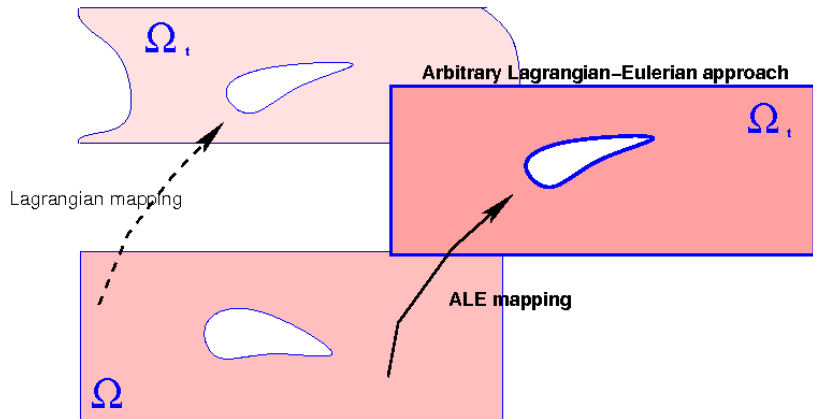


**Lagrangian approach**

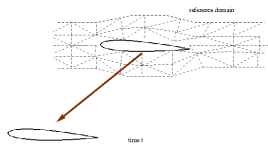


**Eulerian approach**

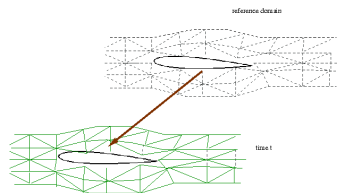
# Arbitrary Lagrangian-Eulerian metoda



# How to apply ALE method?

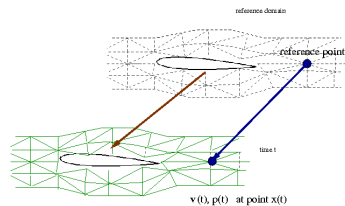


# How to apply ALE method?



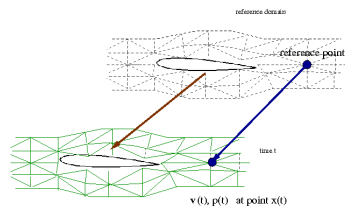
- ▶ ALE mapping  $\mathcal{A}_t : \Omega_0 \mapsto \Omega_t$

# How to apply ALE method?



- ▶ ALE mapping  $\mathcal{A}_t : \Omega_0 \mapsto \Omega_t$
- ▶ point  $x(t)$  moves in time

# How to apply ALE method?

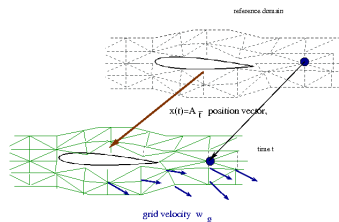


- ▶ ALE mapping  $\mathcal{A}_t : \Omega_0 \mapsto \Omega_t$
- ▶ point  $x(t)$  moves in time
- ▶ domain velocity

$$\mathbf{w}_D(x, t) = \tilde{\mathbf{w}}_D(\xi, t) = \frac{\partial \mathcal{A}_t(\xi)}{\partial t}$$



# How to apply ALE method?

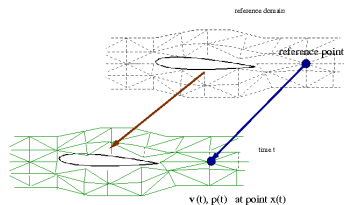


- ▶ ALE mapping  $\mathcal{A}_t : \Omega_0 \mapsto \Omega_t$
- ▶ point  $x(t)$  moves in time
- ▶ domain velocity

$$\mathbf{w}_D(x, t) = \tilde{\mathbf{w}}_D(\xi, t) = \frac{\partial \mathcal{A}_t(\xi)}{\partial t}$$

- ▶  $\frac{D^{\mathcal{A}}f}{Dt}$  - ALE derivative,

# How to apply ALE method?



- ▶ ALE mapping  $\mathcal{A}_t : \Omega_0 \mapsto \Omega_t$
- ▶ point  $x(t)$  moves in time
- ▶ domain velocity

$$\mathbf{w}_D(x, t) = \tilde{\mathbf{w}}_D(\xi, t) = \frac{\partial \mathcal{A}_t(\xi)}{\partial t}$$

- ▶  $\frac{D^{\mathcal{A}}f}{Dt}$  - ALE derivative,
- ▶ relation

$$\frac{D^{\mathcal{A}}f}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{w}_D \cdot \nabla)f$$

# Arbitrary Lagrangian-Eulerian metoda

- ▶ Define ALE mapping  $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A}_t : \Omega_{\text{ref}} \mapsto \Omega_t, \quad x = \mathcal{A}(\xi, t)$$

- ▶ Domain velocity (grid velocity)

$$\tilde{\mathbf{w}}_D(\xi, t) = \frac{\partial \mathcal{A}(\xi, t)}{\partial t} \quad (5)$$

- ▶ ALE derivative - time derivative on ALE trajectory

$$\frac{D^{\mathcal{A}}}{Dt} f = \frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{w}_D \cdot \nabla) f, \quad (6)$$

# Arbitrary Lagrangian-Eulerian formulace

$$\begin{aligned} \frac{D^A \mathbf{v}}{Dt} + (\mathbf{v} - \mathbf{w}_D) \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla p - \nu \Delta \mathbf{v} &= \mathbf{f} \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \quad \text{in } \Omega_t \end{aligned}$$

Poznámky:

- ▶ časová diskretizace pomocí BDF
- ▶ kvalita sítě se může v čase měnit (remeshing)
- ▶ praktická konstrukce ALE (?)

# MKP a stabilizace

Navier-Stokesovy rovnice:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla p - \nu \Delta \mathbf{v} &= \mathbf{f} \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0\end{aligned}$$

- ▶ Zjednodušení - Stokesův problém:

$$\begin{aligned}-\nu \Delta \mathbf{v} + \nabla p &= \mathbf{f} \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0\end{aligned}$$

- ▶ Zjednodušení - Konvekce difuze:

$$(\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \nu \Delta \mathbf{v} = 0$$

- ▶ Nelineární problém

# MKP a stabilizace

## Prostorová diskretizace

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla p - \nu \Delta \mathbf{v} &= \mathbf{f} \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0\end{aligned}$$

Vezmeme testovací funkce  $\mathbf{z}$ ,  $q$ , přenásobíme, zintegrujeme.

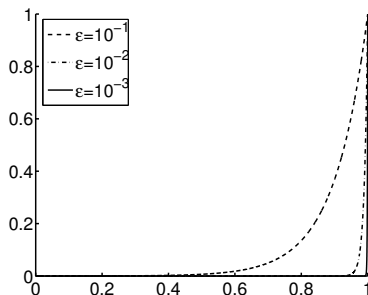
$$\left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}, \mathbf{z} \right) - (p, \nabla \cdot \mathbf{z}) + \nu (\nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{z}) + (q, \nabla \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}).$$

1. zdroje nestability: vysoká Reynoldsova čísla,

$$Re = \frac{L_\infty U_\infty}{\nu}$$

2. inf-sup podmínka (rozdílná role  $\mathbf{v}$ ,  $p$  v rovnicích)

## Model problem (1D)



$$-\epsilon u'' + bu' = 0, \quad u(0) = 0, u(1) = 1,$$

Řešení závisí na podílu  $b/\epsilon$

$$u(x) = \frac{e^{bx/\epsilon} - 1}{e^{b/\epsilon} - 1}.$$

## Model problem (1D) - discrete solution



- ▶ MKP (ekvidistantní síť),

$$-\varepsilon u'' + bu' = 0 \quad \text{v } (0, 1),$$

- ▶ centrální diference

$$u''(x_i) \approx \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2}, \quad u'(x_i) \approx \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h}$$

- ▶

$$-\varepsilon \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} + b \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h} = 0$$



## Model problem (1D) - discrete solution



- ▶ MKP (ekvidistantní síť),

$$-\varepsilon u'' + bu' = 0 \quad \text{v } (0, 1),$$

- ▶ centrální diference

$$u''(x_i) \approx \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2}, \quad u'(x_i) \approx \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h}$$

- ▶

$$-\varepsilon h^2 \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{\varepsilon h^2} + h^2 b \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h} = 0$$

- ▶  $Pe = \frac{bh}{2\varepsilon}$

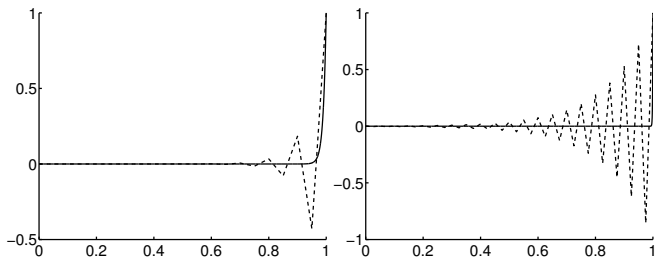
# Model problem (1D) - discrete solution

- ▶ řešení

$$U_i = A + B \left( \frac{1 + Pe}{1 - Pe} \right)^i$$

- ▶ monotonie jen pro

$$Pe = \frac{bh}{\varepsilon} \leq 1.$$



# Model problem (1D) - upwind

- ▶ Úloha

$$-\varepsilon u'' + bu' = 0 \quad \text{v } (0, 1),$$

- ▶ upwind schéma

$$u'(x_i) \approx \frac{U_i - U_{i-1}}{h} = \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h} + \frac{h(-U_{i+1} + 2U_i - U_{i-1})}{2h^2}$$

- ▶ modifikovaná/perturovaná úloha

$$-(\varepsilon + \frac{h}{2})u'' + bu' = 0 \quad \text{v } (0, 1),$$

## Model problem (1D) - upwind

- ▶ Úloha

$$-\varepsilon u'' + bu' = 0 \quad \text{v } (0, 1),$$

- ▶ upwind schéma

$$u'(x_i) \approx \frac{U_i - U_{i-1}}{h} = \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h} + \frac{h(-U_{i+1} + 2U_i - U_{i-1})}{2h^2}$$

- ▶ modifikovaná/perturovaná úloha

$$-(\varepsilon + \frac{h}{2})u'' + bu' = 0 \quad \text{v } (0, 1),$$

- ▶ Upwind je vlastně **uměle přidaná viskozita!**

# Stabilizace problému konvekce difuze

Problém

$$\underbrace{-\epsilon \Delta u + \mathbf{b} \cdot \nabla u + \alpha u}_{Lu} = f$$

- ▶ Umělá vazkost (isotropic viscosity),  $-\delta_K \Delta u$ , tj.

$$\int_{\Omega} \delta_K (\nabla u \cdot \nabla v) dx$$

lépe: streamline upwind (ve směru proudu)

$$\int_{\Omega} \delta_K (\mathbf{b} \cdot \nabla u) (\mathbf{b} \cdot \nabla v) dx$$

- ▶ streamline-upwind/Petrov-Galerkin

$$\int_{\Omega} \delta_K (Lu - f) (\mathbf{b} \cdot \nabla v) dx$$

- ▶ crosswind diffusion (nelineární závisí na  $|Lu - f|$ )

# MKP a stabilizace

## Inf-sup podmínka, stabilizace

$$\left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \mathbf{v}, \mathbf{z} \right) + \nu (\nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{z}) - (p, \nabla \cdot \mathbf{z}) + (q, \nabla \cdot \mathbf{v}) = 0$$

- ▶ Naivní diskretizace MKP (Stokes)

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_p \end{pmatrix}$$

- ▶ Regularita matice - závisí na hodnotě  $B$ !
- ▶ Zaručena jen pro vhodně zvolené prvky:  
 $P_2/P_1$  (Taylor-Hood,  $P_3/P_2$ , nikoliv  $P_1/P_1$ !)
- ▶ Lze použít stabilizace!

# Stabilizace MKP pro Navier-Stokesovy rovnice

$$\left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \mathbf{v}, \mathbf{z} \right) + \nu (\nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{z}) - (p, \nabla \cdot \mathbf{z}) + (q, \nabla \cdot \mathbf{v}) = (f, \mathbf{z})$$

- ▶ stabilizujem dva zdroje nestability (Re, inf-sup condition)
- ▶ streamline diffusion/Petrov-Galerkin (Re)

$$(\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \mathbf{z})$$

- ▶ pressure stabilizing/Petrov-Galerkin (inf-sup podmínka),

$$(\nabla p, \nabla q)$$

## Stabilizovaná FEM formulace

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \mathbf{v}, \mathbf{z} \right) + \nu (\nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{z}) - (p, \nabla \cdot \mathbf{z}) + (q, \nabla \cdot \mathbf{v}) \\ + \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = (f, \mathbf{z}) + \mathcal{F}(\mathcal{V}). \end{aligned}$$

holds for all  $\mathbf{z}$  and  $q$ . Here, SUPG/PSPG terms

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V}) &= \left( \frac{3}{2\Delta t} \mathbf{v} - \nu \Delta \mathbf{v} + (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla p, \delta_{\mathcal{K}}(\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \mathbf{z} + \delta_{\mathcal{K}} \nabla q \right), \\ \mathcal{F}(\mathcal{V}) &= (f, \delta_{\mathcal{K}}(\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \mathbf{z} + \delta_{\mathcal{K}} \nabla q), \end{aligned}$$



## Stabilizovaná FEM formulace

$$\left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \mathbf{v}, \mathbf{z} \right) + \nu (\nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{z}) - (p, \nabla \cdot \mathbf{z}) + (q, \nabla \cdot \mathbf{v}) + \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = (f, \mathbf{z}) + \mathcal{F}(\mathcal{V}).$$

holds for all  $\mathbf{z}$  and  $q$ . Here, SUPG/PSPG terms

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V}) &= \left( \frac{3}{2\Delta t} \mathbf{v} - \nu \Delta \mathbf{v} + (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla p, \delta_K (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \mathbf{z} + \delta_K \nabla q \right), \\ \mathcal{F}(\mathcal{V}) &= (f, \delta_K (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \mathbf{z} + \delta_K \nabla q), \end{aligned}$$

Volba  $\delta_K, \delta_K$  - závisí na  $\tilde{\mathbf{v}}, \nu, h$

## Stabilizovaná FEM formulace

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \mathbf{v}, \mathbf{z} \right) + \nu (\nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{z}) - (p, \nabla \cdot \mathbf{z}) + (q, \nabla \cdot \mathbf{v}) \\ & + \mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathcal{V}) + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K \left( \nabla \cdot \mathbf{v}, \nabla \cdot \mathbf{z} \right)_K = (f, \mathbf{z}) + \mathcal{F}(\mathcal{V}). \end{aligned}$$

holds for all  $\mathbf{z}$  and  $q$ . Here, SUPG/PSPG terms

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathcal{V}) &= \left( \frac{3}{2\Delta t} \mathbf{v} - \nu \Delta \mathbf{v} + (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla p, \delta_K (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \mathbf{z} + \delta_K \nabla q \right), \\ \mathcal{F}(\mathcal{V}) &= (f, \delta_K (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \mathbf{z} + \delta_K \nabla q), \end{aligned}$$

Volba  $\delta_K, \delta_K$  - závisí na  $\tilde{\mathbf{v}}, \nu, h$

# Závěr

Při výpočtech metodou konečných prvků nezapomínat na její matematickou podstatu, matematickou formulaci.

Děkuji za pozornost!