



Modelování výnosové křivky a modelování úrokových nákladů státního dluhu

Kamil Kladívko

Odbor řízení státního dluhu a finančního majetku



Úrokové náklady portfolia státního dluhu

Úrokové náklady státního dluhu určuje:

1. Složení portfolia státního dluhu

- Státní dluhopisy (SDD) a Státní pokladniční poukázky (SPP)
- Emise na zahraničním trhu (eurobondy)
- REPO operace
- Půjčky od EIB
- Derivátové operace

2. Vývoj úrokových sazeb

- Přibližně 30% státního dluhu mění alespoň jednou během roku svoji úrokovou sazbu (tzv. floatová část portfolia)
- **Chceme-li modelovat úrokové náklady** státního dluhu, je nutné kvantifikovat vývoj úrokových sazeb – **potřebujeme model úrokových sazeb**, respektive výnosové křivky



Výnosová křivka úrokových sazeb

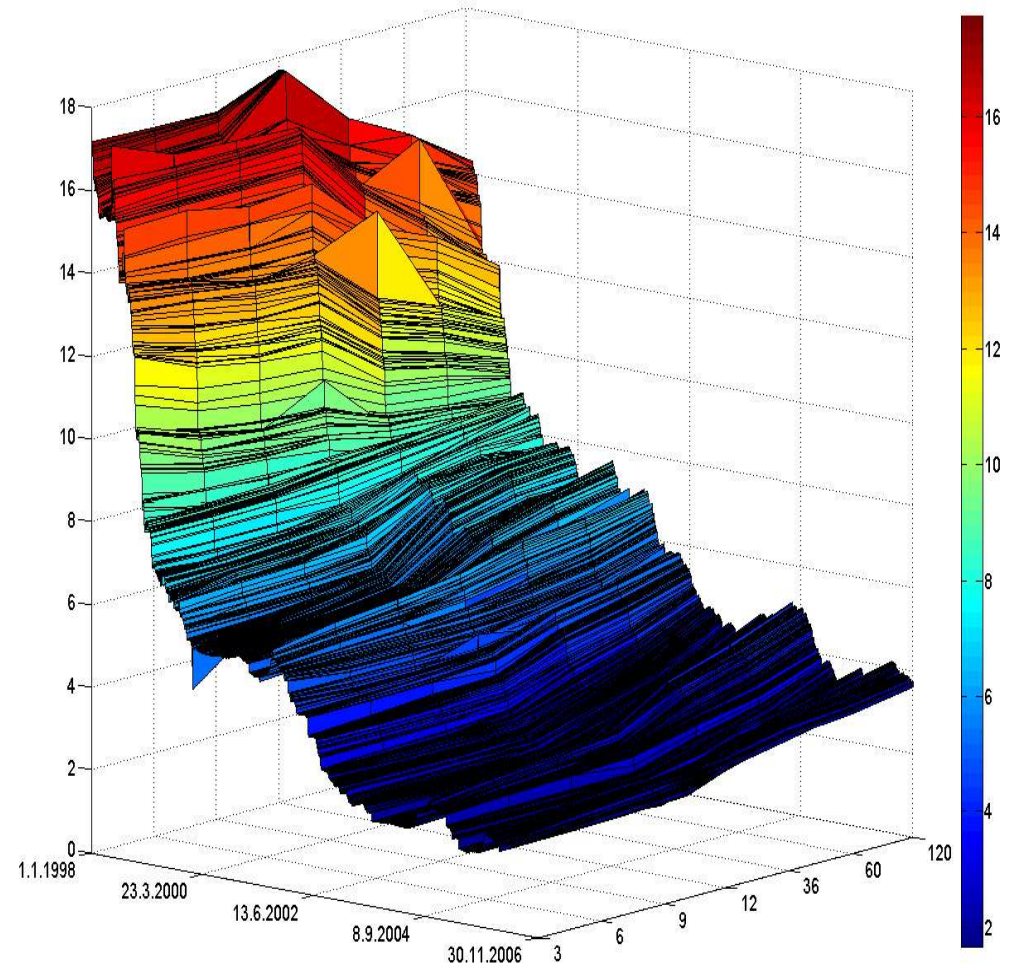
Výnosová křivka úrokových sazeb

- **Vícerozměrný proces** (až 20 splatností)
- **Silně korelované veličiny**
- **Denní pozorování**

Úrokové sazby

- **Silně autokorelované**
- Navrací se k dlouhodobé rovnovážné úrovni – vlastnost „**mean reversion**“
- V **dlouhém horizontu** jsou **stacionární** (nemají jednotkový kořen)

Vývoj 7 splatností českých úrokových sazeb od 1/98 do 11/06





Vývoj úrokových sazeb - model CIR (Cox-Ingersoll-Ross)

V roce 2006 jsme pro modelování výnosové křivky použili model CIR

- Jednofaktorový, bezarbitrážní model založený na tzv. krátkodobé úrokové sazbě. Publikován v roce 1985 v časopise Econometrica
- Používá například dánská centrální banka, portugalská agentura pro řízení dluhu (IGCP) a Světová banka.

- Dynamika krátkodobé úrokové sazby se řídí SDE: $dr_t = \alpha(\mu - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t$

kde: r_t je krátkodobá úroková sazba v čase t
 μ je dlouhodobá rovnovážná úroveň (ekvilibrum) této sazby
 α je koeficient rychlosti návratu k μ
 σ je volatilita úrokové míry
 W_t je standardní Wienerův proces

- Parametry (α , μ , σ) SDE krátkodobé úrokové sazby jsou odhadnuty z časové řady denních pozorování úrokové sazby PRIBOR 3M pomocí zobecněné momentové metody a pomocí metody maximální věrohodnosti
- Kromě parametrů SDE je nutné odhadnout tržní cenu rizika λ , která určuje průměrný sklon výnosové křivky. Tržní cena rizika λ nelineárně konverguje ke své dlouhodobé rovnovážné úrovni
- Výnos bezkuponového dluhopisu je deterministickou funkcí výše uvedených parametrů, krátkodobé sazby a doby do splatnosti dluhopisu
- Odhad parametrů a simulace provedeny v Excelu s použitím optimalizační DLL



Model CIR – simulace výnosové křivky, performance 2006

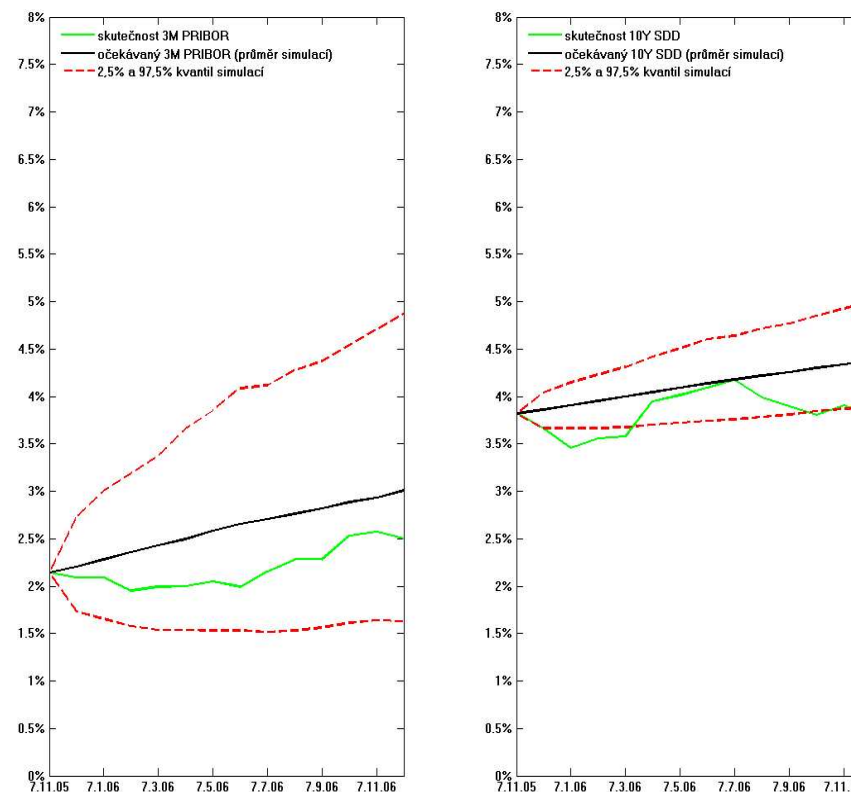
- Na základě odhadu parametrů je simulován vývoj krátkodobé sazby na příštích 14 měsíců (listopad 2005 až prosinec 2006). Simulováno 1000 cest vývoje sazeb.
- Ostatní splatnosti výnosové křivky jsou dány oceňovací formulí

Nedostatky modelu CIR:

- Podhodnocení volatility úrokových sazeb na dlouhém konci výnosové křivky, viz pravý graf obrázku
- Nízká robustnost odhadů parametrů vzhledem k odhadovacím technikám
- Linearita driftu SDE je příliš velkým zjednodušením skutečného procesu úrokových sazeb

V roce 2006 začal odbor řízení Státního dluhu vyvíjet vlastní model výnosové křivky s cílem odstranit nedostatky modelu CIR

Skutečný versus predikovaný vývoj PRIBOR 3M a 10Y SDD (listopad 2005 až prosinec 2006)





Výstavba vlastního modelu výnosové křivky

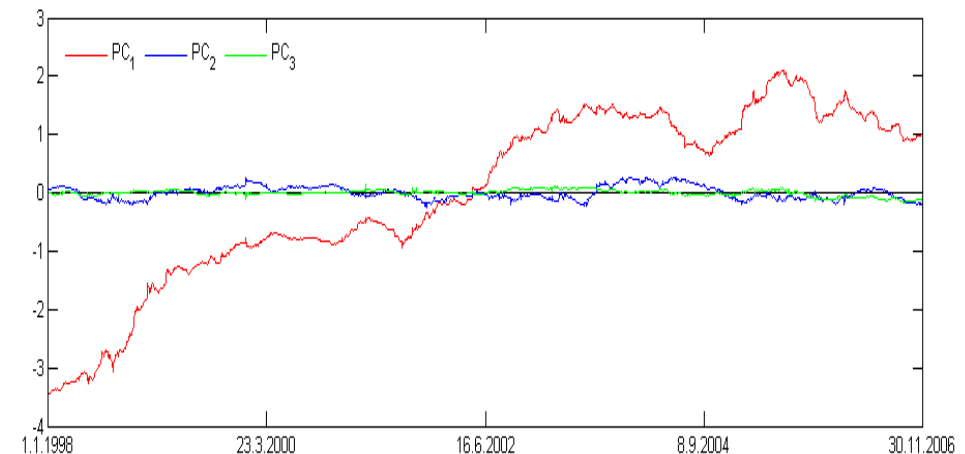
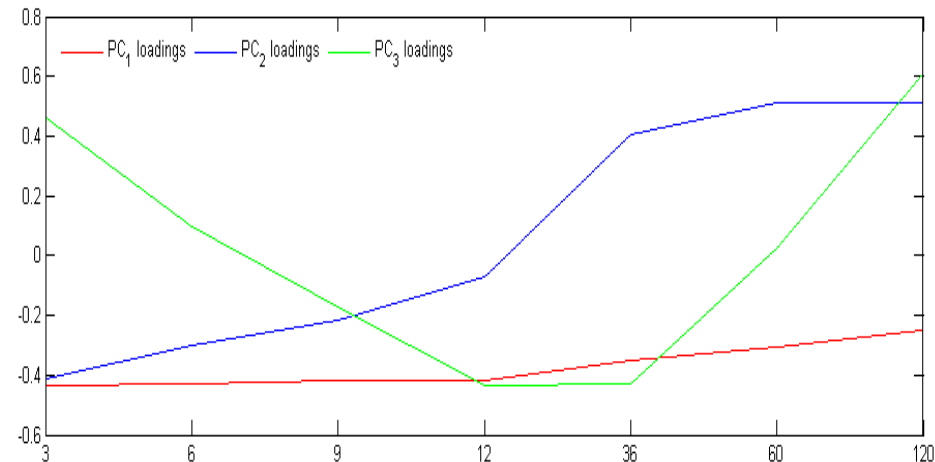
1. Metoda hlavních komponent redukuje dimenzi problému na 3 hlavní komponenty, které jsou ve stejném čase lineárně nezávislé
2. Nelineární stochastické diferenciální rovnice s kubickým driftem zachycují proces komponent
3. Odhad parametrů SDE je založený na marginální hustotě procesu komponent a jádrových funkcích
4. Simulace vývoje 3 hlavních komponent
5. „Inverzí“ metody hlavních komponent získáme simulace vývoje celé výnosové křivky
6. Testování modelu



Analýza hlavních komponent (PCA) na výnosovou křivku

- Každá komponenta je lineární kombinace všech uvažovaných splatností úrokových sazeb
- První 3 komponenty vysvětlí přes 99,9% variability sazeb
- Redukce dimenze (z 12 na 3)
- Komponenty ve stejném čase nekorelované
- Očekávaná hodnota každé komponenty je rovna 0
- **Přirozená interpretace** komponent:
PC1 – úroveň křivky
PC2 – sklon křivky
PC3 – zakřivení („hrb“) křivky
- Analýza hlavních komponent převádí úlohu modelování 12rozměrného silně korelovaného procesu na úlohu modelování 3 lineárně nezávislých procesů

Komponentní zátěže – přirozená interpretace



Vývoj 3 hlavních komponent české výnosové křivky



Stochastické diferenciální rovnice pro modelování prvních tří hlavních komponent PC1, PC2 a PC3

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \text{ kde: } \mu(X_t) \text{ je drift procesu}$$

$$\sigma(X_t) \text{ je difúze procesu}$$

$$W_t \text{ je standardní Wienerův proces}$$

Např. drift a difúze modelu CIR (lineární drift):

$$\mu(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x \quad \text{a} \quad \sigma^2(x) = \beta_0 x$$

Pro modelování PC1, PC2 a PC3 použijeme kubický drift (nelineární) a konstantní difúzi:

$$\mu(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 \quad \text{a} \quad \sigma^2(x) = \beta_0$$

Proces má vlastnost „mean reversion“, platí-li:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \mu(x, \theta) < 0 \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \mu(x, \theta) > 0. \quad \text{Řešením limit získáváme omezení: } \alpha_3 < 0$$

Za předpokladu stacionarity procesu má marginální hustota procesu tvar:

$$\pi(x, \theta) = \frac{\xi(\theta)}{\sigma^2(x, \theta)} \exp \left\{ \int_{x_0}^x \frac{2\mu(u, \theta)}{\sigma^2(u, \theta)} du \right\}, \text{ kde } \xi(\theta) \text{ je normalizační konstanta, která zaručuje, že integrál přes hustotu je jednotkový}$$

Parametrický tvar hustoty SDE s kubickým driftem a konstantní difúzí:

$$\pi(x, \theta) = \frac{\xi(\theta)}{\beta_0} \exp \left\{ \frac{2\alpha_0 x}{\beta_0} + \frac{\alpha_1 x^2}{\beta_0} + \frac{2\alpha_2 x^3}{3\beta_0} + \frac{\alpha_3 x^4}{2\beta_0} \right\},$$



Odhad parametrů SDE - přibližování parametrické a neparametrické marginální hustoty procesu SDE

Neparametrický odhad hustoty z čas. řady komponent pomocí jádrových funkcí:

$$est\pi(u) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{b_n} K\left(\frac{u - x_i}{b_n}\right), \text{ kde: } \begin{array}{l} K(\cdot) \text{ je jádrová funkce, používáme normální jádrovou funkci} \\ b_n \text{ je konstanta vyhlazení (bandwidth)} \\ n \text{ je počet pozorování čas. řady komponent} \end{array}$$

Objektivní funkce odhadu je založena na minimalizaci vzdálenosti parametrické marginální hustoty SDE a jejího neparametrického odhadu:

$$O = E\left\{[\pi(X, \theta) - est\pi(X)]^2\right\} = \int_{\underline{x}}^{\bar{x}} (\pi(u, \theta) - est\pi(u))^2 est\pi(u) du$$

Techniku odhadu představil Yacine Ait-Sahalia v roce 1996 pro odhad tzv. General Parametric model. Aplikoval na 1W sazbu Eurodollar. Viz Testing-Continuous-Time Models of the Spot Interest Rate (1996).

Objektivní funkce kubického driftu s konstantní difúzí:

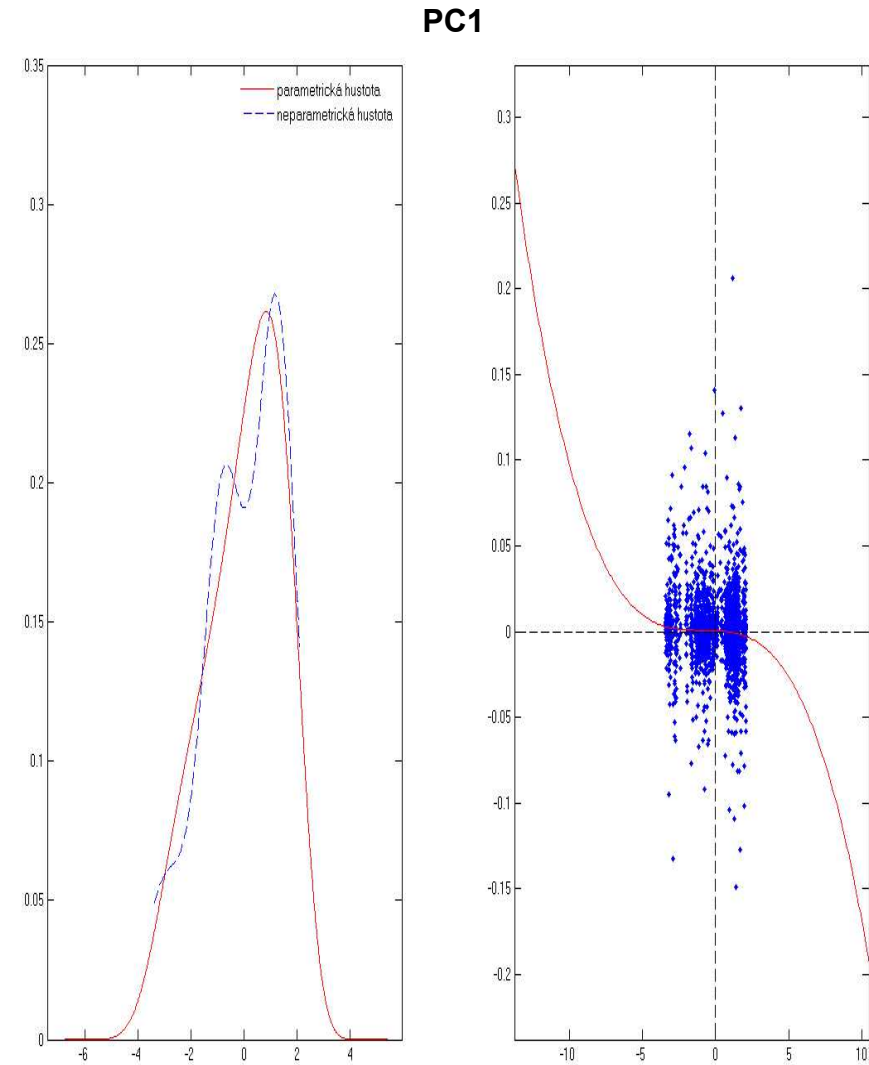
$$est\theta = \arg \min_{\theta \in \Theta} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\log \zeta(\theta) - \log \beta_0 + \frac{2\alpha_0 x_i}{\beta_0} + \frac{\alpha_1 x_i^2}{\beta_0} + \frac{2\alpha_2 x_i^3}{\beta_0} + \frac{\alpha_3 x_i^4}{2\beta_0} - \log(est\pi(x_i)) \right)^2$$



Realizace odhadu pro PC1 české výnosové křivky

PC1 (úroveň křivky)

- Nenormalita
- V intervalu -4 až +4 drift blízký 0; Proces se chová jako náhodná procházka; Lokální nestacionarita
- Mimo interval -4 až +4 silný nelineární drift
- Globálně stacionární



„Fit“ parametrické hustoty

Průběh driftu a denní změny

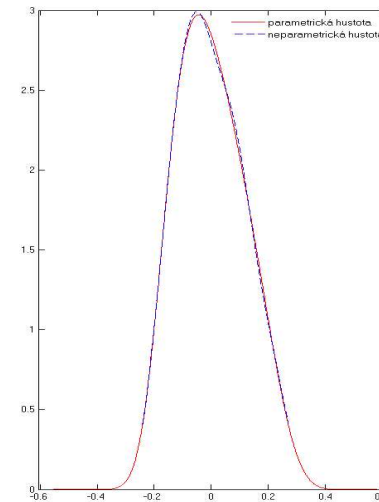


Realizace odhadu pro PC2 a PC3 české výnosové křivky

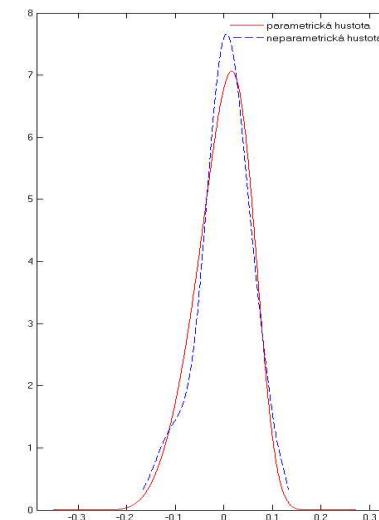
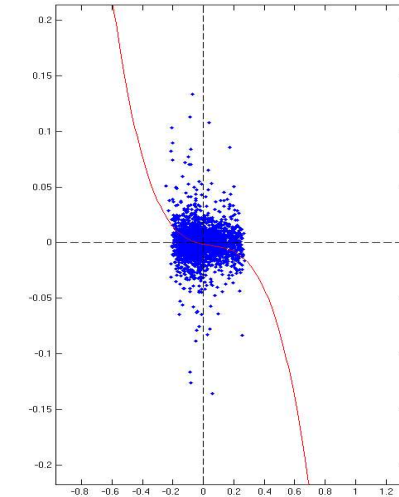
PC2 a PC3 (sklon a zakřivení)

- Nenormalita
- Špičatost
- V blízkosti 0 slabý drift, s rostoucí vzdáleností od 0 velmi silný drift
- Globálně stacionární

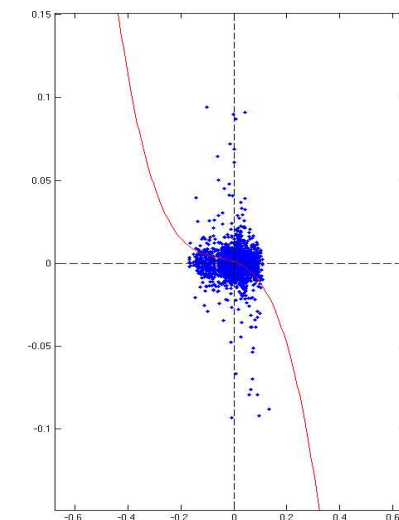
Kubický drift umožňuje lépe popsat proces úrokových sazeb nebo jejich komponent než model s lineárním driftem (SDE modelu CIR, SDE modelu Vasicek)



PC2



PC3



„Fit“ parametrické hustoty

Průběh driftu a denní změny



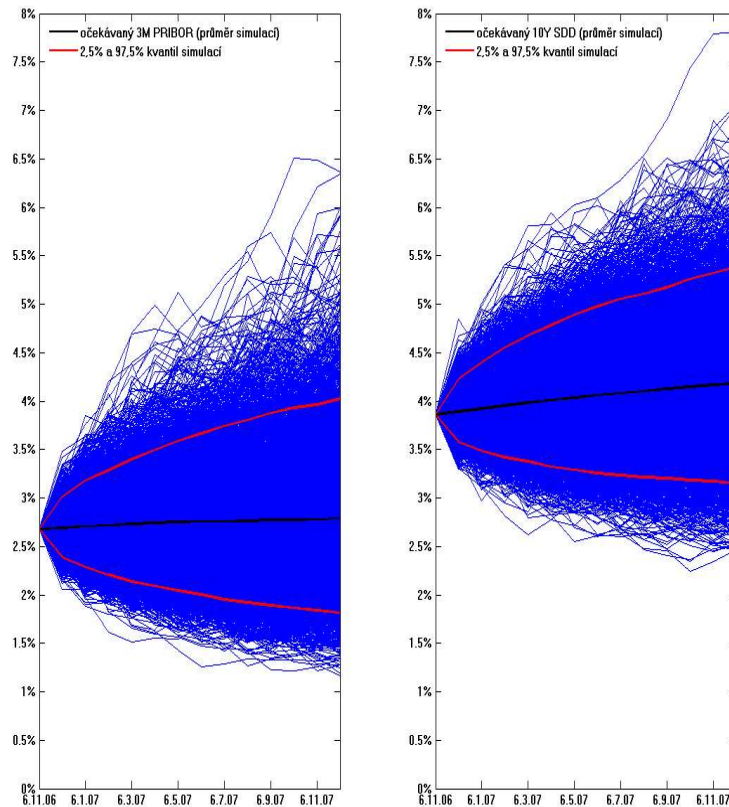
Vlastní model – simulace výnosové křivky na rok 2007

SDE diskretizujeme Eulerovou diskretizací a simulujeme proces PC1, PC2 a PC3:

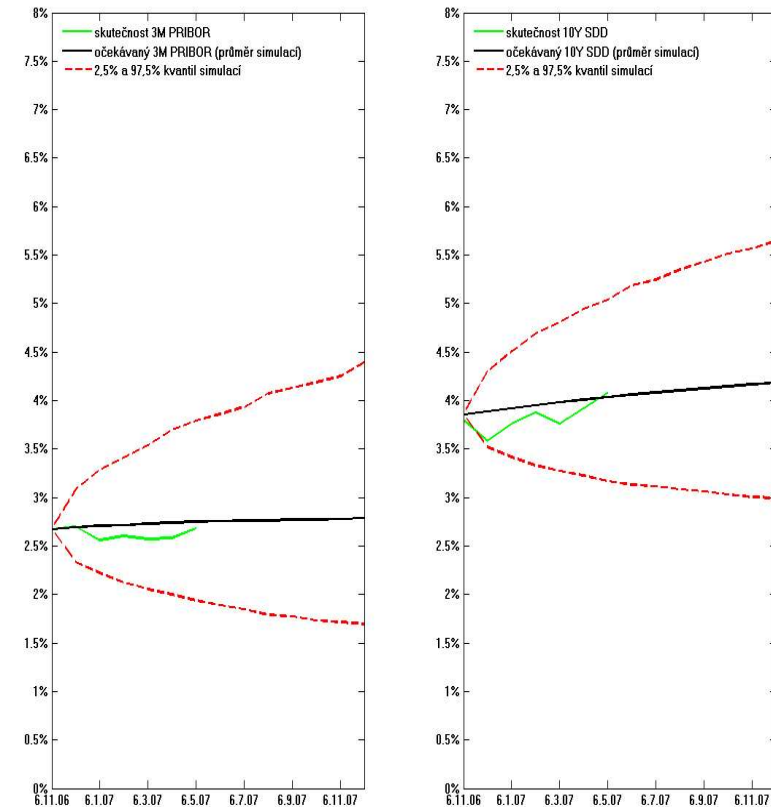
$$x_{t+\Delta t} = x_t + (\alpha_0 + \alpha_1 x_t + \alpha_2 x_t^2 + \alpha_3 x_t^3) \Delta t + \sqrt{\beta_0 \Delta t} \varepsilon_t, \text{ kde } \varepsilon_t \sim N(0,1)$$

„Inverzí“ PCA získáme simulace všech splatností výnosové křivky

Simulace sazeb PRIBOR 3M a 10Y SDD na rok 2007



Skutečný versus predikovaný vývoj PRIBOR 3M a 10Y SDD (listopad 2006 - květen 2007)





Zhodnocení navrženého modelu

Navrhli jsem nelineární model výnosové křivky českého trhu úrokových sazeb, který má praktické použití v risk managementu úrokových instrumentů:

- model testován v simulačním experimentu, vykazuje výrazně lepší vlastnosti než třída lineárních modelů (Vasicek, CIR, ale i např. VAR aplikovaný na PC1, PC2 a PC3)

Výhody navrženého postupu

- PCA uspokojivě řeší vysoký rozměr procesu výnosové křivky
- SDE – flexibilní tvar driftu i difúze
- Metoda odhadu řeší problém diskretizace, který vzniká při jiných postupech odhadu;
Proces skutečně odhadujeme ve spojitém čase

Nevýhody navrženého postupu

- Metoda odhadu pracuje pouze s marginální hustotou procesu
- Pro neparametrický odhad hustoty pomocí jádrové funkce neexistuje optimální volba konstanty vyhlazení; Neparametrický odhad hustoty je subjektivní
- V případě rozšíření o nelineární difúzi relativně obtížná implementace modelu



Determinace úrokových nákladů portfolia státního dluhu

Model výnosové křivky je vstupem pro model úrokových nákladů státního dluhu

1. Cesty vývoje úrokových sazeb určují úrokové náklady floatové části portfolia státního dluhu

- SPP
- půjčky od EIB
- floatové nohy derivátových operací

2. Dále určují úrokové náklady SDD

- kapitálové zisky, respektive ztráty plynoucí z tranší znovu otevíraných emisí SDD
- kupóny nových emisí

Ze simulací úrokových sazeb vyplývají simulace úrokových nákladů státního dluhu:

- **Průměr simulací úrokových nákladů je odhadem očekávaných úrokových nákladů**
- **Kvantil simulací úrokových nákladů je odhadem úrokových nákladů v riziku**
- **95% kvantil simulací udává hodnotu, kterou úrokové náklady s 95% pravděpodobností nepřekročí, určuje úrokové náklady v riziku, tzv. 95% CaR (Cost-at-Risk)**

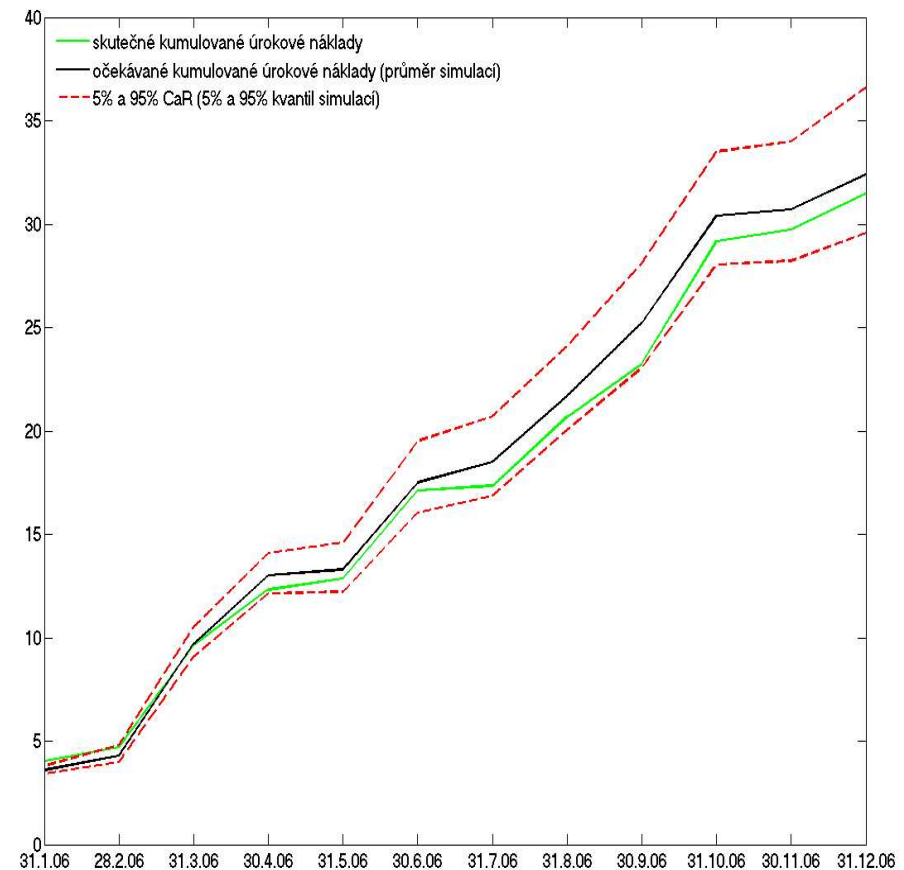


Očekávané úrokové náklady a 95% CaR v roce 2006

V roce 2006 jsme pro simulace úrokových sazeb použili model CIR

- Emisní kalendář deterministický, čerpání půjček EIB známe
- Neuvažujeme možnost vzniku nových derivátových kontraktů, které by změnily expozici portfolia státního dluhu vůči úrokovým sazbám
- Předpokládáme, že zahraniční emise budou zajištěny proti kursovému riziku

Vývoj skutečných versus predikovaných kumulovaných úrokových nákladů (mld. Kč) státního dluhu v roce 2006





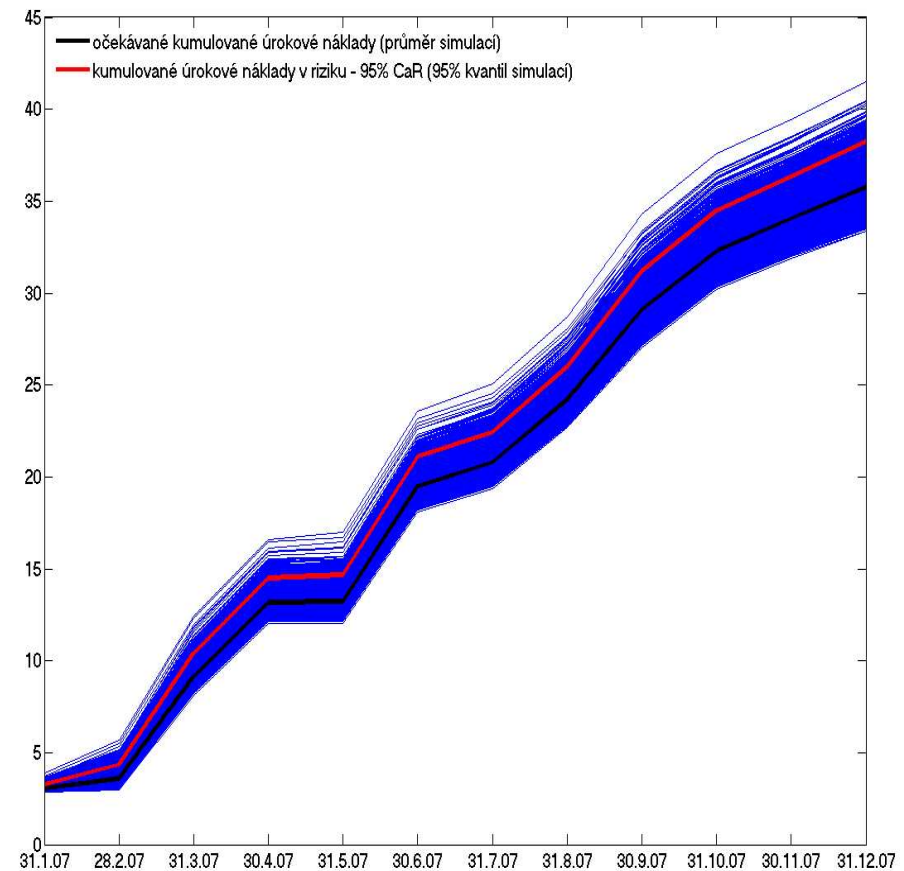
Očekávané úrokové náklady a 95% CaR v roce 2007

Pro simulace úrokových sazeb na rok 2007 jsme použili vlastní model výnosové křivky založený na PCA a SDE s kubickým driftem

Měsíce roku 2007	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Očekávané kumulované náklady	3,0	3,6	9,1	13,2	13,2	19,5
95% CaR kumulovaných nákladů	3,3	4,3	10,4	14,5	14,7	21,1
Měsíce roku 2007	7.	8.	9.	10.	11.	12.
Očekávané kumulované náklady	20,8	24,2	29,1	32,3	34,0	35,7
95% CaR kumulovaných nákladů	22,4	26,0	31,2	34,5	36,3	38,2

- Očekávané náklady jsou 35,7 mld. Kč
- Náklady v riziku – 95% Cost-at-Risk je 38,2 mld. Kč
- Emisní kalendář deterministický, čerpání půjček EIB známé
- Neuvažujeme možnost vzniku nových derivátových kontraktů, které by změnily expozici portfolia státního dluhu vůči úrokovým sazbám
- Předpokládáme, že zahraniční emise budou zajištěny proti kursovému riziku

Simulace vývoje kumulovaných úrokových nákladů (mld. Kč) státního dluhu pro rok 2007





Další využití modelů

- Odhad očekávaných úrokových nákladů a úrokových nákladů v riziku na delší období, řekněme 3 až 5 let
- Optimalizace portfolia státního dluhu – teoreticky optimální struktura portfolia z hlediska očekávaných nákladů a jejich rizika.
- Navržený model výnosové křivky lze využít i pro např. vyhodnocení ziskovosti a rizika derivátových instrumentů

***Více informací najdete na
www.mfcr.cz/statnidluh***

Děkuji za pozornost