Modelování extrému

Aplikace na časové řady denních spotových cen elektrické energie

Igor Paholok, Market Risk Specialist

Prague, 11 June 2010

Modelování extrémů

- Úvod a charakteristika časových řad
- Mean Reverting Process
- Jump Diffusion Mean Reverting Process
- Extreme Value Theory
- Závěr

Úvod a charakteristika časových řad

- Úvod
- Charakteristika časových řad

Úvod

- Cílem práce je najít vhodný přístup ke kalkulaci VaR (případně CVaR) vhodný pro specifické časové řady vývoje cen spotových denních kontraků s elektrickou energií.

- Na zvoleném konfidenčním intervalu na hladině významnosti *α, je* Value at Risk (VaR) definován jako výnos r* kterého překročení realizací výnosů r nastane s pravděpodobností 1- *α* v daném časovém horizontu.

$$1-\alpha=\int_{-\infty}^{X^*} f(r)dx = P(r \le r^*) = p;$$

- Časové řady byli vybrané vzhledem k jejich charakteristikám.

- Využité byli časové řady z období 2006 – 2009 kde data z období 2006 – 2007 sloužili k počáteční kalibrací modelů, data z období 2008 – 2009 pak dynamické kalibraci a k zpětnému testování.

- Využité časové řady jsou (původní označení v anglickém jazyce):
  - APX Power NL Day ahead 24-hour electricity time average price (APX BL)
  - Powernext Power Exchange day ahead base-load electricity average (POWERNEXT BL)
  - European Energy Exchange Peak Load Phelix Electricity spot price (PHELIX PL)

- V práci byli aplikované tři přístupy (dvě stochastické procesy a jedna statistická metoda):
  - Mean reverting process
  - Jump diffusion mean reverting process
  - Extreme Value Theory

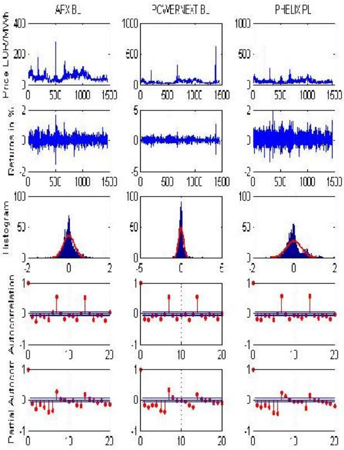
- Úspěšnost přístupu pro kalkulaci VaR byla hodnocená pomocí metody zpětného testování (backtesting).

Charakteristika časových řad

- Vysoká volatilita
- Extrémní cenové skoky
- Po skoku se cena elektrické energie vrací k původní úrovni
- Sezónnost
- Rozdělení výnosů nevykazuje charakteristiky normálního rozdělení

	APX BL	POWERNEXT BL	PHELIX BL
Skewness	0.5	0.94	0.86
Kurtosis	6.5	12.37	5.02

- Většina charakteristik je vysvětlená neskladovatelnosti daného aktíva a povahou nabídkové a poptávkové strany trhu s elektrickou energií.



Použité MATLAB funkce : y = skewness(x); k=kurtosis(x); n=hist(y); autocorr(y); parcorr(y)

Charakteristika časových řad

- Před samotnou aplikací stochastických procesů je nutné z původních časových řad denních logaritmických změn vyčlenit tzv. deterministickou/sezónní složku.

- Pro účely výzkumu byla využitá deterministická sezónní funkce akcentující týdenní sezónnost

$$x(t) - x(t-1) = \mu_1 + \mu_2 WD_{1,t} + \mu_3 WD_{2,t} + \mu_4 WD_{3,t} + \mu_5 WD_{4,t} + \mu_6 WD_{5,t} + \mu_7 WD_{6,t} + \mu_8 WD_{7,t} + e_t \,;$$

Kde u_j jsou sezónní faktory a $WD_{i,t}$ představuje matici 7 x 7 s diagonálou 1 pro *i=1,2,3…7* podle aktuální hodnoty dne v týdnu (například 1 značí Pondělí… 7 Neděle)

- Průměrné výsledky pro celé sledované období jsou:

	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6	μ_7	μ_8
APX BL	-0.00079	0.103088	-0.01656	-0.01123	-0.04843	-0.18179	-0.22631	0.380452
POWERNEXT BL	-0.00063	0.068195	-0.01511	-0.00443	-0.05555	-0.18262	-0.24037	0.429267
PHELIX BL	-0.00015	0.048421	-0.00165	-0.03232	-0.08622	-0.25682	-0.26667	0.5950

Mean Reverting Process

- Definice Mean Reverting Process
- Kalibrace Mean Reverting Process

Definice Mean Reverting Process

- Mean reverting process (známy též jako Ornstein – Uhlenbeck process) je často využíván při modelování cenového vývoje komoditních instrumentů.
- Proces modeluje chování, kde se cena po odklonu od určité fundamentální úrovně vrací k této úrovni zpět.
- Je dán vztahem:

$$dx(t) = \eta(\bar{x} - x(t))dt + \sigma\, dt\, B(t);$$

Kde $x(t) = \ln(Pt)$, η představuje rychlost návratu k průměru (speed of mean reversion), $\bar{x}$ představuje rovnovážnou úroveň ceny, σ je volatilita a *B(t)* reprezentuje brownův pohyb (brownian notion).

- Odhad parametrů modelu lze standardně provést metodou maximální věrohodnosti (maximum likelihood estimation) s využitím funkce hustoty (density function):

$$ft(x_t;\bar{x};\eta;\sigma) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\sigma^2}{2\eta}\left(1 - e^{-2\eta(t-(t-1))}\right)\right) \times \exp\left[\frac{\left(x_t - \bar{x} - (x_{t-1} - \bar{x})e^{-\eta(t-(t-1))}\right)^2}{2\frac{\sigma^2}{2\eta}\left(1 - e^{-2\eta(t-(t-1))}\right)}\right];$$

Kalibrace Mean Reverting Process

- Alternativní přístup Dixit, Pindyck [6] řeší optimalizační problém kde definují *dx(t)* jako autoregresní proces řádu jedna (AR1). Pro limitní případ (*dt* se blíži k nule) můžeme proces zapsat následující rovnicí:

$$x_t - x_{t-1} = \bar{x}\left(1 - e^{-\eta\Delta t}\right) + \left(e^{-\eta\Delta t} - 1\right)x_{t-1} + \varepsilon_t;$$

Kde ε_t má normální rozdělení, střední hodnotu nula a směrodatnou odchylku σ_ε a

$$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{\left[1 - \exp(-2\eta)\right]\sigma^2}{2\eta};$$

- Parametry modelu odhadneme řešením regrese: $x_t - x_{t-1} = a + bx_{t-1} + \varepsilon_t;$

kde

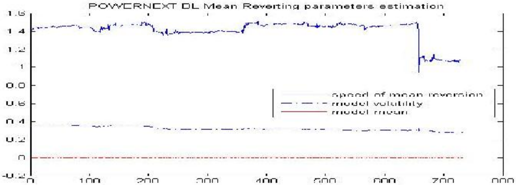
$$\bar{x} = \frac{-a}{b};$$

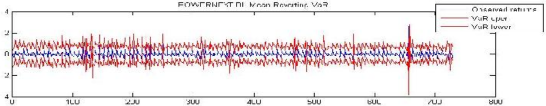
$$\eta = -\ln(1+b);$$

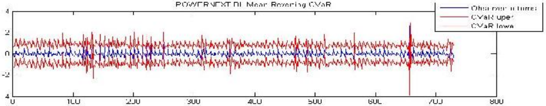
$$\sigma = \sigma_\varepsilon \sqrt{\frac{2\ln(1+b)}{(1+b)^2 - 1}};$$

Použité MATLAB funkce : regstats(y,X,model)

Kalibrace Mean Reverting Process







Jump Diffusion Mean Reverting Process

- Definice a kalibrace Jump Diffusion Mean Reverting Process

Definice a kalibrace Jump Diffusion Mean Reverting Process

- Proces je vhodný k modelování ojedinělých cenových skoků a následným zpětným návratem k určité rovnovážné úrovní.

- Je dán vztahem:

$$dx(t) = \mu dt + \sigma\, dt\, B(t) + J dq;$$

Kde μ substituuje $\eta(\bar{x} - x(t))$, *dq* představuje Poissonov process kde *dq* = *1* s pravděpodobností λ a *dq* = *0* s pravděpodobností *1-λ*. Předpokládáme, že skok má normální rozdělení s volatilitou σ_j a průměrem *J*. Význam parametrů definovaných v předešlém textů zůstává neměnný .

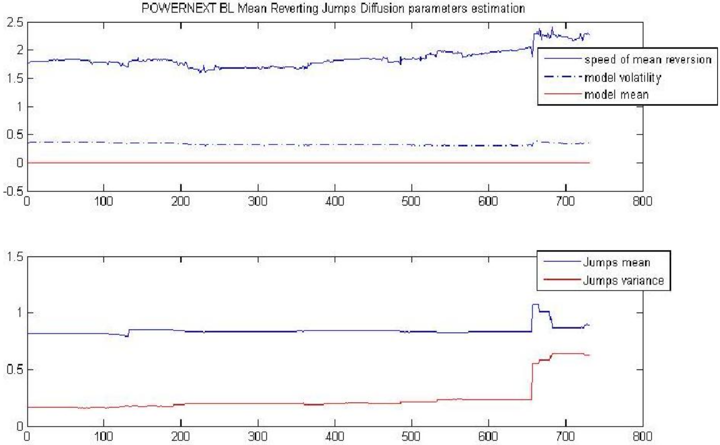
- Odhad parametrů modelu lze standardně provést metodou maximální věrohodnosti (maximum likelihood estimation) s využitím funkce hustoty (density function) Lazenets, Senchyna [9]:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!\sqrt{2\pi\left(\sigma^2 + \sigma_J^2\right)}} \exp\left(\frac{-\left(x - \mu - nJ\right)^2}{2\left(\sigma^2 + n\sigma_J^2\right)}\right);$$

- Další z možných přístupu kalibrace spočívá ve vyčlenění extrémních hodnot a spočtení parametrů (J, σ_j, λ).

- Reziduální časovou řadu využijeme ke kalibraci parametrů (η, $\bar{x}$, σ).

Definice a kalibrace Jump Diffusion Mean Reverting Process



Extreme Value Theory

- Extreme Value Theory
- Výpočet VaR a CVaR pomocí Extreme Value Theory

Extreme Value Theory

- Přístup je vhodné využít pro modelování "chvostů" v případech kdy časové řady nesplňují charakteristiky normálního rozdělení

- Koncept vychází z úvahy, že změny (denní výnosy) menší než určitá prahová úroveň, nenesou v sobě informace o extrémních změnách přesahující tuto prahovou úroveň. K modelování chvostů využijeme pouze extrémní hodnoty přesahující tuto prahovou úroveň.

- Změny nad určitou prahovou úroveň mají své specifické rozdělení; využívá se Generalized Pareto Distribution které je dané:

  $$G_{\xi,\sigma,\mu}(r) = 1 - \left(1 + \xi \frac{r-\mu}{\beta}\right)^{-1/\xi}; if\ \xi \neq 0$$

  a

  $$G_{\xi,\sigma,\mu}(r) = 1 - \left(1 + \exp\left(-\frac{r-\mu}{\beta}\right)\right); if\ \xi = 0$$

  Kde ξ (tail index) je parametr udávající tvar (shape), β (scale) a μ představuje hodnotu stanoveného prahu.

- Příslušná distribuční funkce (pro dostatečně velké μ) je

  $$F_X(r) \approx (1 - F_X(\mu))\left(1 - \left(1 + \xi \frac{r-\mu}{\sigma}\right)^{-1/\xi}\right) + F_x(\mu)$$

  $$F_X(r) \approx \frac{N_\mu}{n}\left(1 - \left(1 + \xi \frac{r-\mu}{\sigma}\right)^{-1/\xi}\right) + 1 - \frac{N_\mu}{n}$$

  kde n je počet pozorovaní a $N\mu$ je počet pozorovaní přesahující prahovou úroveň μ.

Výpočet VaR a CVaR pomocí Extreme Value Theory

- VaR při daném konfidenčním intervalu na hladině spolehlivosti α a dané distribuční funkci můžeme spočítat dle vztahu:

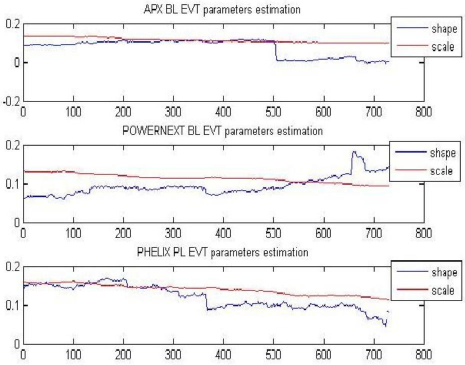
$$VaR_{\alpha} = \mu + \frac{\beta}{\xi}\left(\left(\frac{n}{N_{\mu}}\alpha\right)^{-\xi} - 1\right);$$

- CVaR je pak definován jako:

$$CVaR = VaR_{\alpha} + \frac{\beta + \xi(VaR_{\alpha} - \mu)}{1-\xi};$$

- Odhad parametrů pomoci

parmhat = gpfit(X, alpha)



Závěr

- Výsledky Backtestingu
- Závěr

Výsledky Backtestingu

- Pro zpětnou kontrolu vhodnosti modelu pro výpočet VaR využijeme backtesting, kde pro akceptaci modelu, musí počet realizovaných překročení hodnoty VaR spadat do určitého intervalu.
- Interval lze stanovit pomocí inverzního Poissonovho rozdělení s konfidenčními intervaly $\alpha\ 1=(1-\ \alpha)/2$ a $\alpha\ 2=1-\ \alpha\ 1$
- Při časové řadě obsahující 730 dnů by měl počet překročení umožňující akceptaci modelu spadat do intervalu <1,15>.

	VaR_{lower} excesses	VaR_{uper} excess
ABX BL mean reverting	5	6
POWERNEXT BL mean reverting	5	11
PHELIX PL mean reverting	3	5
ABX BL mean reverting jump diffusion	8	10
POWERNEXT BL mean reverting jump diffusion	8	12
PHELIX PL mean reverting jump diffusion	3	6
ABX BL EVT	3	3
POWERNEXT BL EVT	4	5
PHELIX PL EVT	2	3

Použité MATLAB funkce : poissinv

Závěr

- Diskuze
- Děkuji za pozornost
- igor.paholok@unicreditgroup.cz

Reference

[1] ARLT, J., M., ARLTOVÁ, M.: *Ekonomické časové řady*. Grada Publishing, Praha, 2007.

[2] BARAN, J.: *Analýza a porovnání různých modelů pro Value at Risk na nelineárním portfoliu.* Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky, 2009.

[3] CARTEA, A., MARCELO, G.F.: *Pricing in Elektricity Markets: a mean reverting jump diffusion model with seasonality*. University of London, 2005

[4] CULOT, M., GOFFIN, V., LAWFORD,S. a kol: *An Affine Jump Diffusion Model for Electricity*. Electrabel SA, 2006.

[5] CRAINE, R., LOCHSTOER L., SYRTVEIT, K.: *Estimation of a Stochastic-Volatility Jump-Diffusion Model.* University of California at Berkley, 2000.

[6] ČULÍK, M., VALECKÝ, J.: *Non-linear Modelling of Electricity Price: Self Exciting Threshold Auto-Regressive Approach.* Mezinárodní konference Finanční řízení podniků a finančních institucí, Ostrava, 2009.

[7] DIXIT, A.K., PINDYCK R.S.: *Investment Under Uncertainty*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1994

[8] GARCIA FRANCO, J.C.: *Maximum likelihood estimation of mean reverting process.*

[9] HORNÍK, T., DRAHOVZAL, O.: *Nová rizika v energetice – velkoobchodní trh s elektřinou.* Ekonomika a Management, Praha, 2008.

Reference

[10] LYZANETS, N., SENCHYNA, M.: *Comparing different Value-at-Risk models for hedge funds.* University of Lausanne, 2005.

[11] MEYER-BRANDIS, T.,TANKOV, P.: *Multi-factor jump-diffusion models of elektricity prices*. Europlace Institute of Finance, 2006.

[12] PAHOLOK, I.: *Modelovanie volatility futures kontraktov s elektrickou energiou na PXE.* Mezinárodní konference Finanční řízení podniků a finančních institucí, Ostrava, 2009

[13] PAPEŽ, M.: *Verifikace VaR modelu – back testing*

[14] RUEDIGER, K., SCHINDLMAYR G., REIK, H. B.: *A Two-Factor Model for the Electricity Forward Market*. Universtat Karlsruhe, Karlsruhe, 2005