VÝUKA ZÁKLADNÍCH NUMERICKÝCH ALGORITMŮ V MATLABU – APROXIMACE KUBICKÝMI SPLAJNY

Jiří Kulička

Mgr. Jiří Kulička, University of Pardubice, Jan Perner Transport Faculty, Department of Informatics in Transport, Studentská 95, 532 10 Pardubice, Czech Republic, tel.: +420 466 036 428, E-mail: jiri.kulicka@upce.cz

Abstract

The paper deals with the design of algorithms cubic spline. There are examples of guided m-files in Matlab and illustrated with examples compared various types of spline curves and demonstrated their design. The numerical examples using different boundary conditions for approximating cubic spline is shown that it is not just the course of splines in the outer intervals, but we get quite different spline functions. It is shown here that the formal expression of the algorithm can easily derive a wider range of properties. Very similar to the basic algorithms can function enough to represent a broad class here with varying oscillations.

1 Úvod

V technické praxi velice často potřebujeme určit spojitou křivku, která prochází naměřenými diskrétními body. Interpolační polynom vyššího stupně však obsahuje určitý počet extrémních bodů a vykazuje značnou oscilaci. Přistoupíme-li k interpolaci tak, že rozdělíme daný interval na několik disjunktních podintervalů, v nichž konstruujeme jiný částečný polynom třetího stupně, vyhneme se nepříjemné oscilaci. Tyto částečné polynomy složíme na hladkou, na sebe navazující kubickou křivku. Důležité je, že se nám může podařit, aby i druhá derivace byla na celém intervalu spojitá.

2 Definice kubického splajnu

Předpokládejme, že $\{[x_k, y_k]\}_{k=0}^{N}$ je N+1 bodů, kde $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$. Funkce S(x) se nazývá kubický splajn právě tehdy, když existují kubické polynomy $S_k(x)$ s koeficienty s(k,0), s(k,1), s(k,2) a s(k,3), které splňují následující podmínky:

1. $S(x) = S_k(x) = s_{(k,0)} + s_{(k,1)} \cdot (x - x_k) + s_{(k,2)}.(x - x_k)^2 + s_{(k,3)} \cdot (x - x_k)^3$

   pro $x \in \langle x_k; x_{k+1}\rangle$ a $k = 0, 1, \cdots, N-1$

   (S(x) se skládá z jednotlivých kubických polynomů)
2. $S(x_k) = y_k$ pro $k = 0, 1, \cdots, N$

   (jednotlivé kubické křivky procházejí danými body)
3. $S_k(x_{k+1}) = S_{k+1}(x_{k+1})$ pro $k = 0, 1, \cdots, N-2$
4. $S'_k(x_{k+1}) = S'_{k+1}(x_{k+1})$ pro $k = 0, 1, \cdots, N-2$

   (S(x) je spojitá funkce)
5. $S''_k(x_{k+1}) = S''_{k+1}(x_{k+1})$ pro $k = 0, 1, \cdots, N-2$

   (S(x) má spojitou druhou derivaci)

3 Existence kubického splajnu

Každý kubický polynom má čtyři neznámé koeficienty s(k,0), s(k,1), s(k,2) a s(k,3). Musíme tedy určit 4N koeficientů. Dané body představují N+1 podmínek, body 3, 4 a 5 v definici kubického splajnu každá představuje N-1 podmínek. Máme tedy 4N-2 podmínky. Zbývající dvě nazýváme koncová omezení, která zpravidla zahrnují hodnoty první a druhé derivace v koncových bodech.

Kubický splajn je po částech polynom třetího stupně. Druhé derivace jsou spojité a po částech lineární na $\langle x_k; x_{k+1}\rangle$. Vyjádřím tedy lineární Lagrangeův polynom:

$$S_k''(x_k) = S''(x_k)\cdot\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}} + S''(x_{k+1})\cdot\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k} \qquad (1)$$

V rovnici (1) označím:

$S''(x_k) = m_k, S''(x_{k+1}) = m_{k+1}$ a $h_k = x_{k+1} - x_k$.

$$S_k''(x) = \frac{m_k}{h_k}\cdot(x_{k+1}-x) + \frac{m_{k+1}}{h_k}\cdot(x-x_k) \qquad (2)$$

pro $x_k \le x \le x_{k+1}$ a $k = 0, 1, \cdots, N-1$.

Integrací (2) dostaneme:

$$S_k'(x) = -\frac{m_k}{h_k}\cdot\frac{(x_{k+1}-x)^2}{2} + \frac{m_{k+1}}{h_k}\cdot\frac{(x-x_k)^2}{2} + C \qquad (3)$$

Integrací (3) dostaneme:

$$S_k(x) = \frac{m_k}{6\cdot h_k}\cdot(x_{k+1}-x)^3 + \frac{m_{k+1}}{6\cdot h_k}\cdot(x-x_k)^3 + C\cdot x + D \qquad (4)$$

Konstanty C a D v rovnicích (3) a (4) vypočítáme dosazením bodů $[x_k; y_k]$, resp. $[x_{k+1}; y_{k+1}]$ do rovnice (4):

$\frac{m_k}{6}\cdot h_k^2 + C\cdot x_k + D = y_k$ a $\frac{m_{k+1}}{6}\cdot h_k^2 + C\cdot x_{k+1} + D = y_{k+1}$.

Vzniklá soustava

$$C\cdot x_k + D = y_k - \frac{m_k}{6}\cdot h_k^2$$

$$C\cdot x_{k+1} + D = y_{k+1} - \frac{m_{k+1}}{6}\cdot h_k^2$$

má řešení:

$$C = \frac{y_{k+1}-y_k}{h_k} - \frac{m_{k+1}\cdot h_k - m_k\cdot h_k}{6} \text{ a } D = x_k\cdot\left(\frac{m_{k+1}\cdot h_k}{6} - \frac{y_{k+1}}{h_k}\right) + x_{k+1}\cdot\left(\frac{y_k}{h_k} - \frac{m_k\cdot h_k}{6}\right). \qquad (5)$$

Dosazením do rovnice (4) za konstanty C a D a následnou úpravou dostaneme:

$$S_k(x) = \frac{m_k}{6\cdot h_k}\cdot(x_{k+1}-x)^3 + \frac{m_{k+1}}{6\cdot h_k}\cdot(x-x_k)^3 + \left(\frac{y_k}{h_k} - \frac{m_k\cdot h_k}{6}\right)\cdot(x_{k+1}-x) +$$
$$+\left(\frac{y_{k+1}}{h_k} - \frac{m_{k+1}\cdot h_k}{6}\right)\cdot(x-x_k). \qquad (6)$$

V rovnici (6) se vyskytují jako neznámé pouze koeficienty $\{m_k\}$. Pro jejich určení musíme tuto rovnici derivovat:

$$S_k'(x) = -\frac{m_k}{2\cdot h_k}\cdot(x_{k+1}-x)^2 + \frac{m_{k+1}}{2\cdot h_k}\cdot(x-x_k)^2 - \left(\frac{y_k}{h_k} - \frac{m_k\cdot h_k}{6}\right) + \frac{y_{k+1}}{h_k} - \frac{m_{k+1}\cdot h_k}{6} \quad (7)$$

Dosazením x_k za x do rovnice (7) dostaneme:

$$S_k'(x_k) = -\frac{m_k\cdot h_k}{3} - \frac{m_{k+1}\cdot h_k}{6} + d_k, \text{ kde } d_k = \frac{y_{k+1}-y_k}{h_k}. \quad (8)$$

Podobně, nahrazením k-1 za k a dosazením x_k za x do rovnice (8) dostaneme:

$$S_{k-1}'(x_k) = \frac{m_k\cdot h_{k-1}}{3} - \frac{m_{k-1}\cdot h_{k-1}}{6} + d_{k-1}, \text{kde } d_{k-1} = \frac{y_{k+1}-y_k}{h_k}. \quad (9)$$

Kubický splajn musí splňovat podmínku 4 uvedenou v definici:

$$S_{k-1}'(x_k) = S_k'(x_k).$$

Tím získáme důležitý vztah mezi m_{k-1}, m_k a m_{k+1}:

$$h_{k-1}\cdot m_{k-1} + 2\cdot(h_{k-1} + h_k)\cdot m_k + h_k\cdot m_{k+1} = u_k, \quad (10)$$

kde $u_k = 6\cdot(d_k - d_{k-1})$, pro $k = 1,\cdots,N-1$. Toto vyjádření představuje N-1 lineárních rovnic o N+1 neznámých $\{m_0, m_1, m_2, \cdots, m_N\}$. Z tohoto důvodu musíme volit dvě okrajové podmínky pro neznámé m_0 a m_N. Po implementování okrajových podmínek dostaneme třídiagonální, ostře diagonálně dominantní soustavu lineárních rovnic, kterou můžeme s úspěchem řešit nejen přímými, ale i iteračními metodami.

Maticový zápis soustavy je:

$$\begin{bmatrix} 2\cdot(h_0+h_1) & h_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ h_1 & 2\cdot(h_0+h_1) & h_2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & h_2 & 2\cdot(h_2+h_3) & h_3 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_{N-2} & 2\cdot(h_{N-2}+h_{N-1}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{N-2} \\ m_{N-1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} u_1 - m_0\cdot h_0 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{N-1} - m_N\cdot h_{N-1} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Zjednodušený zápis soustavy odpovídající označení v programu je:

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_1 & b_2 & c_2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & a_2 & b_3 & c_3 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{N-2} & b_{N-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{N-2} \\ m_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 - m_0\cdot h_0 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{N-1} - m_N\cdot h_{N-1} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Po výpočtu neznámých $\{m_0, m_1, m_2, \cdots, m_N\}$, vypočteme koeficienty kubického splajnu $S_k(x)$ pomocí následujících vztahů:

$$s_{(k,0)} = y_k, \quad s_{(k,1)} = d_k - \frac{h_k\cdot(2\cdot m_k + m_{k+1})}{6}, \quad s_{(k,2)} = \frac{m_k}{2}, \quad s_{(k,3)} = \frac{m_{k+1}-m_k}{6\cdot h_k}. \quad (13)$$

Kubický splajn pak vyjádříme ve tvaru:

$$S_k(x) = s_{(k,0)} + s_{(k,1)} \cdot (x - x_k) + s_{(k,2)} . (x - x_k)^2 + s_{(k,3)} \cdot (x - x_k)^3,$$

pro $x \in \langle x_k ; x_{k+1} \rangle$ a $k = 0, 1, \cdots, N-1$. (14)

4 Typy kubických splajnů dle okrajových podmínek

4.1 Sevřený kubický splajn

U sevřeného kubického splajnu máme dány první derivace, tedy směrnice v okrajových bodech: $S'(a) = d_{-1}$ a $S'(b) = d_N$. Vztahy pro výpočet m_0 a m_N jsou:

$$m_0 = \frac{3}{h_0} \cdot (d_0 - d_{-1}) - \frac{m_1}{2}, m_N = \frac{3}{h_{N-1}} \cdot (d_N - d_{N-1}) - \frac{m_{N-1}}{2}. \quad (15)$$

Po dosazení do rovnice (10) a úpravě vypadá příslušná soustava rovnic takto:

$$\left(\frac{3}{2} \cdot h_0 + 2 \cdot h_1\right) \cdot m_1 + h_1 \cdot m_2 = u_1 - 3 \cdot (d_0 - d_{-1})$$

$$h_{k-1} \cdot m_{k-1} + 2 \cdot (h_{k-1} + h_k) \cdot m_k + h_k \cdot m_{k+1} = u_k, \text{ pro } k = 2, 3, \cdots, N-2$$

$$h_{N-2} \cdot m_{N-2} + \left(2 \cdot h_{N-2} + \frac{3}{2} \cdot h_{N-1}\right) \cdot m_{N-1} = u_{N-1} - 3 \cdot (d_N - d_{N-1}).$$

Tento typ splajnu používají konstruktéři pro kreslení hladké křivky procházející několika diskrétními body.

4.2 Přirozený kubický splajn

U přirozeného kubického splajnu jsou druhé derivace v okrajových bodech rovny nule: $S''(a) = 0$ a $S''(b) = 0$. Směrnice v koncových bodech se automaticky přizpůsobí tak, aby minimalizovaly oscilační chování křivky. Toho se využívá v případě, že máme data změřena přesně na několik platných číslic. Vztahy pro výpočet m_0 a m_N jsou:

$$m_0 = 0, m_N = 0. \quad (16)$$

Po dosazení do rovnice (10) a úpravě vypadá příslušná soustava rovnic takto:

$$2 \cdot (h_0 + h_1) \cdot m_1 + h_1 \cdot m_2 = u_1$$

$$h_{k-1} \cdot m_{k-1} + 2 \cdot (h_{k-1} + h_k) \cdot m_k + h_k \cdot m_{k+1} = u_k, \text{ pro } k = 2, 3, \cdots, N-2$$

$$h_{N-2} \cdot m_{N-2} + 2 \cdot (h_{N-2} + h_{N-1}) \cdot m_{N-1} = u_{N-1}.$$

4.3 Extrapolovaný splajn

V tomto případě extrapolujeme hodnoty druhé derivace $S''(a)$ z bodů x_1 a x_2, resp. $S''(b)$ z bodů x_{N-2} a x_{N-1}. Předpokládáme, že koncové kubické křivky jsou rozšířením sousedních kubik na interval $\langle x_0 ; x_2 \rangle$, resp. $\langle x_{N-2} ; x_N \rangle$. Vztahy pro výpočet m_0 a m_N jsou:

$$m_0 = m_1 - \frac{h_0 \cdot (m_2 - m_1)}{h_1}, m_N = m_{N-1} + \frac{h_{N-1} \cdot (m_{N-1} - m_{N-2})}{h_{N-2}}. \quad (17)$$

Po dosazení do rovnice (10) a úpravě vypadá příslušná soustava rovnic takto:

$$\left(3 \cdot h_0 + 2 \cdot h_1 + \frac{h_0^2}{h_1}\right) \cdot m_1 + \left(h_1 - \frac{h_0^2}{h_1}\right) \cdot m_2 = u_1$$

$h_{k-1} \cdot m_{k-1} + 2 \cdot (h_{k-1} + h_k) \cdot m_k + h_k \cdot m_{k+1} = u_k$, pro $k = 2, 3, \cdots, N-2$

$$\left(h_{N-2} - \frac{h_{N-1}^2}{h_{N-2}}\right) \cdot m_{N-2} + \left(2 \cdot h_{N-2} + 3 \cdot h_{N-1} + \frac{h_{N-1}^2}{h_{N-2}}\right) \cdot m_{N-1} = u_{N-1}.$$

4.4 Parabolicky ukončený splajn

Tento typ splajnu má druhé derivace v intervalech $\langle x_0; x_1 \rangle$, resp. $\langle x_{N-1}; x_N \rangle$ konstantní. Kubické splajny v těchto intervalech degenerují na kvadratické. Vztahy pro výpočet m_0 a m_N jsou:

$$m_0 = m_1, m_N = m_{N-1}. \tag{18}$$

Po dosazení do rovnice (10) a úpravě vypadá příslušná soustava rovnic takto:

$$(3 \cdot h_0 + 2 \cdot h_1) \cdot m_1 + h_1 \cdot m_2 = u_1$$

$h_{k-1} \cdot m_{k-1} + 2 \cdot (h_{k-1} + h_k) \cdot m_k + h_k \cdot m_{k+1} = u_k$, pro $k = 2, 3, \cdots, N-2$

$$h_{N-2} \cdot m_{N-2} + \left(2 \cdot h_{N-2} + \frac{3}{2} \cdot h_{N-1}\right) \cdot m_{N-1} = u_{N-1}.$$

4.5 Splajn s přizpůsobeným zakřivením v koncových bodech

Tento typ splajnu má dány nenulové druhé derivace v obou koncových bodech, které povolí regulovat zakřivení splajnu v koncových intervalech. Vztahy pro výpočet m_0 a m_N jsou:

$$m_0 = S''(x_0), m_N = S''(x_N). \tag{19}$$

Po dosazení do rovnice (10) a úpravě vypadá příslušná soustava rovnic takto:

$$2 \cdot (h_0 + h_1) \cdot m_1 + h_1 \cdot m_2 = u_1 - h_0 \cdot S''(x_0)$$

$h_{k-1} \cdot m_{k-1} + 2 \cdot (h_{k-1} + h_k) \cdot m_k + h_k \cdot m_{k+1} = u_k$, pro $k = 2, 3, \cdots, N-2$

$$h_{N-2} \cdot m_{N-2} + 2 \cdot (h_{N-2} + h_{N-1}) \cdot m_{N-1} = u_{N-1} - h_{N-1} \cdot S''(x_N).$$

5 Příklad

Porovnejte průběhy všech výše uvedených typů splajnů, které procházejí body: $[1; -3], [2; 2], [3; 1], [4; 3], [5; 4]$. Dále jsou dány první a druhé derivace v krajních bodech: $S'(x_0) = 1;\ S'(x_N) = -1;\ S''(x_0) = -0{,}3;\ S''(x_N) = 3{,}3$.

Vypočítané konstanty jsou uvedeny v tabulce 1. N=4.

TABULKA 1: KONSTANTY PRO VÝPOČET SPLAJNŮ

k	x_k	y_k	h_k	d_k	u_k
0	1	-3	1	5	
1	2	2	1	-1	-36
2	3	1	1	2	18
3	4	3	1	1	-6
4	5	4			

5.1 Sevřený kubický splajn:

Soustava a výpočet koeficientů $\{m_0, m_1, m_2, m_3, m_4\}$, po dosazení do soustavy v odstavci (4. a) dostaneme:

$$\begin{bmatrix} 3{,}5 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3{,}5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -48 \\ 18 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\{m_0 = 20{,}17857;\ m_1 = -16{,}35714;\ m_2 = 9{,}25;\ m_3 = -2{,}64286;\ m_4 = -4{,}67857\}$.

Po dosazení do (13) vypočítáme koeficienty částečných splajnů (tabulka 2):

TABULKA 2

k	0	1	2	3
S(0;k)	-3,0000	1,0000	10,0893	-6,0893
S(1;k)	2,0000	2,9107	-8,1786	4,2679
S(2;k)	1,0000	-0,6429	4,6250	-1,9821
S(3;k)	3,0000	2,6607	-1,3214	-0,3393

Rovnice částečných splajnů dostaneme po dosazení koeficientů z tabulky 2 do rovnice (14):

$S_0(x) = -3 + 1 \cdot (\mathrm{x} - 1) + 10{,}0893 \cdot (\mathrm{x} - 1)^2 - 6{,}0893 \cdot (\mathrm{x} - 1)^3$, pro $x \in \langle 1; 2 \rangle$,

$S_1(x) = 2 + 2{,}9107 \cdot (\mathrm{x} - 2) - 8{,}1786 \cdot (\mathrm{x} - 2)^2 + 4{,}2679 \cdot (\mathrm{x} - 1)^3$, pro $x \in \langle 2; 3 \rangle$,

$S_2(x) = 1 - 0{,}6429 \cdot (\mathrm{x} - 3) + 4{,}625 \cdot (\mathrm{x} - 3)^2 - 1{,}9821 \cdot (\mathrm{x} - 1)^3$, pro $x \in \langle 3; 4 \rangle$,

$S_3(x) = 3 + 2{,}6607 \cdot (\mathrm{x} - 4) - 1{,}3214 \cdot (\mathrm{x} - 4)^2 - 0{,}3393 \cdot (\mathrm{x} - 1)^3$,

pro $x \in \langle 4; 5 \rangle$.

5.2 Přirozený kubický splajn

Soustava a výpočet koeficientů $\{m_0, m_1, m_2, m_3, m_4\}$, po dosazení do soustavy v kapitole (4. b) dostaneme:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -36 \\ 18 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$\{m_0 = 0;\ m_1 = -11{,}03571; m_2 = 8{,}14286; m_3 = -3{,}53571; m_4 = 0\}$.

Po dosazení do (13) vypočítáme koeficienty částečných splajnů (tabulka 3):

TABULKA 3

k	0	1	2	3
S(0;k)	-3,0000	6,8393	0,0000	-1,8393
S(1;k)	2,0000	1,3214	-5,5179	3,1964
S(2;k)	1,0000	-0,1250	4,0714	-1,9464
S(3;k)	3,0000	2,1786	-1,7679	-0,5893

Rovnice částečných splajnů dostaneme po dosazení koeficientů z tabulky 3 do rovnice (14):

$S_0(x) = -3 + 6{,}8393 \cdot (x-1) + 0 \cdot (x-1)^2 - 1{,}8393 \cdot (x-1)^3$, pro $x \in \langle 1; 2 \rangle$,

$S_1(x) = 2 + 1{,}3214 \cdot (x-2) - 5{,}5179 \cdot (x-2)^2 + 3{,}1964 \cdot (x-1)^3$, pro $x \in \langle 2; 3 \rangle$,

$S_2(x) = 1 - 0{,}1250 \cdot (x-3) + 4{,}0714 \cdot (x-3)^2 - 1{,}9464 \cdot (x-1)^3$, pro $x \in \langle 3; 4 \rangle$,

$S_3(x) = 3 + 2{,}1786 \cdot (x-4) - 1{,}7679 \cdot (x-4)^2 - 0{,}5893 \cdot (x-1)^3$,

pro $x \in \langle 4; 5 \rangle$.

5.3 Extrapolovaný kubický splajn

Soustava a výpočet koeficientů $\{m_0, m_1, m_2, m_3, m_4\}$, po dosazení do soustavy v kapitole (4. c) dostaneme:

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -36 \\ 18 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$\{m_0 = -18{,}25;\ m_1 = -6;\ m_2 = 6{,}25;\ m_3 = -1;\ m_4 = -8{,}25\}$.

Po dosazení do (13) vypočítáme koeficienty částečných splajnů (tabulka 4):

TABULKA 4

k	0	1	2	3
S(0;k)	-3,0000	12,0833	-9,1250	2,0417
S(1;k)	2,0000	-0,0417	-3,0000	2,0417
S(2;k)	1,0000	0,0833	3,1250	-1,2083
S(3;k)	3,0000	2,7083	-0,5000	-1,2083

Rovnice částečných splajnů dostaneme po dosazení koeficientů z tabulky 4 do rovnice (14):

$S_0(x) = -3 + 12{,}0833 \cdot (x-1) - 9{,}125 \cdot (x-1)^2 + 2{,}0417 \cdot (x-1)^3$,

pro $x \in \langle 1; 2 \rangle$,

$S_1(x) = 2 - 0{,}0417 \cdot (x-2) - 3 \cdot (x-2)^2 + 2{,}0417 \cdot (x-1)^3$, pro $x \in \langle 2; 3 \rangle$,

$S_2(x) = 1 + 0{,}0833 \cdot (x-3) + 3{,}125 \cdot (x-3)^2 - 1{,}2083 \cdot (x-1)^3$, pro $x \in \langle 3; 4 \rangle$,

$S_3(x) = 3 + 2{,}7083 \cdot (x-4) - 0{,}5 \cdot (x-4)^2 - 1{,}2083 \cdot (x-1)^3$, pro $x \in \langle 4; 5 \rangle$.

5.4 Parabolický kubický splajn

Soustava a výpočet koeficientů $\{m_0, m_1, m_2, m_3, m_4\}$, po dosazení do soustavy v kapitole (4. d) dostaneme:

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -36 \\ 18 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$\left\{\begin{matrix} m_0 = -8{,}66667;\ m_1 = -8{,}66667; m_2 = 7{,}33333; m_3 = -2{,}66667; \\ m_4 = -2{,}66667 \end{matrix}\right\}.$$

Po dosazení do (13) vypočítáme koeficienty částečných splajnů (tabulka 5):

TABULKA 5

k	0	1	2	3
S(0;k)	-3,0000	9,3333	-4,3333	0
S(1;k)	2,0000	0,6667	-4,3333	2,6667
S(2;k)	1,0000	0,0000	3,6667	-1,6667
S(3;k)	3,0000	2,3333	-1,3333	0

Rovnice částečných splajnů dostaneme po dosazení koeficientů z tabulky 5 do rovnice (14):

$S_0(x) = -3 + 9{,}3333 \cdot (\mathrm{x}-1) - 4{,}3333 \cdot (\mathrm{x}-1)^2 + 0 \cdot (\mathrm{x}-1)^3$, pro $x \in \langle 1; 2\rangle$,

$S_1(x) = 2 + 0{,}6667 \cdot (\mathrm{x}-2) - 4{,}3333 \cdot (\mathrm{x}-2)^2 + 2{,}6667 \cdot (\mathrm{x}-1)^3$, pro $x \in \langle 2; 3\rangle$,

$S_2(x) = 1 + 0 \cdot (\mathrm{x}-3) + 3{,}6667 \cdot (\mathrm{x}-3)^2 - 1{,}6667 \cdot (\mathrm{x}-1)^3$, pro $x \in \langle 3; 4\rangle$,

$S_3(x) = 3 + 2{,}3333 \cdot (\mathrm{x}-4) - 1{,}3333 \cdot (\mathrm{x}-4)^2 + 0 \cdot (\mathrm{x}-1)^3$, pro $x \in \langle 4; 5\rangle$.

5.5 Zakřivený kubický splajn

Soustava a výpočet koeficientů $\{m_0, m_1, m_2, m_3, m_4\}$, po dosazení do soustavy v kapitole (4. e) dostaneme:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -35{,}7 \\ 18 \\ -9{,}3 \end{bmatrix}$$

$\{m_0 = -0{,}3;\ m_1 = 11{,}01429; m_2 = 8{,}35714; m_3 = -4{,}41429; m_4 = 3{,}3\}$.

Po dosazení do (13) vypočítáme koeficienty částečných splajnů (tabulka 6):

TABULKA 6

k	0	1	2	3
S(0;k)	-3,0000	6,9357	-0,1500	-1,7857
S(1;k)	2,0000	1,2786	-5,5071	3,2286
S(2;k)	1,0000	-0,0500	4,1786	-2,1286
S(3;k)	3,0000	1,9214	-2,2071	1,2857

Rovnice částečných splajnů dostaneme po dosazení koeficientů z tabulky 6 do rovnice (14):

$S_0(x) = -3 + 6{,}9357 \cdot (\mathrm{x}-1) - 0{,}15 \cdot (\mathrm{x}-1)^2 - 1{,}7857 \cdot (\mathrm{x}-1)^3$, pro $x \in \langle 1; 2\rangle$,

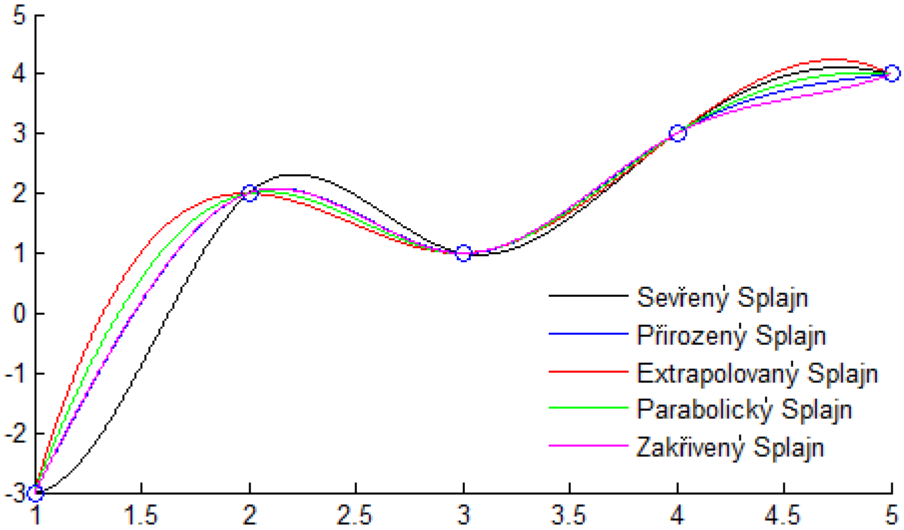
$S_1(x) = 2 + 1{,}2786 \cdot (\mathrm{x}-2) - 5{,}5071 \cdot (\mathrm{x}-2)^2 + 3{,}2286 \cdot (\mathrm{x}-1)^3$, pro $x \in \langle 2; 3\rangle$,

$S_2(x) = 1 - 0{,}05 \cdot (x - 3) + 4{,}1786 \cdot (x - 3)^2 - 2{,}1286 \cdot (x - 1)^3$, pro $x \in \langle 3; 4\rangle$,

$S_3(x) = 3 + 1{,}9214 \cdot (x - 4) - 2{,}2071 \cdot (x - 4)^2 + 1{,}2857 \cdot (x - 1)^3$,

pro $x \in \langle 4; 5\rangle$.

Grafy jednotlivých splajnů můžeme porovnat na obrázku 1.

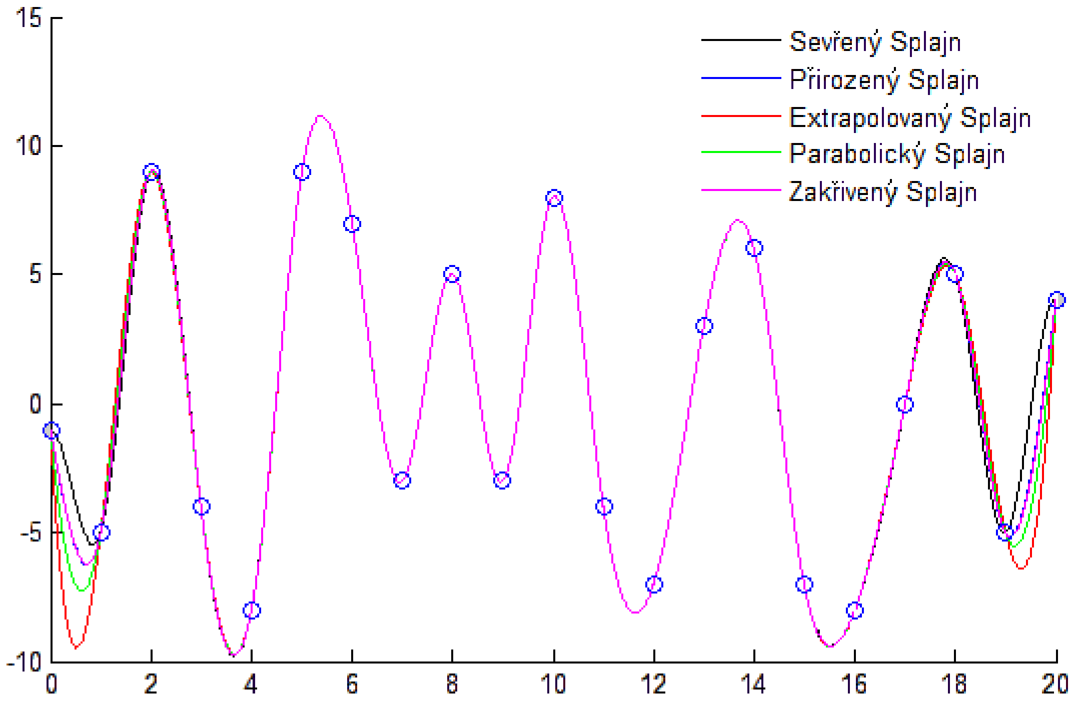


Obrázek 1
Porovnání splajnů z příkladu

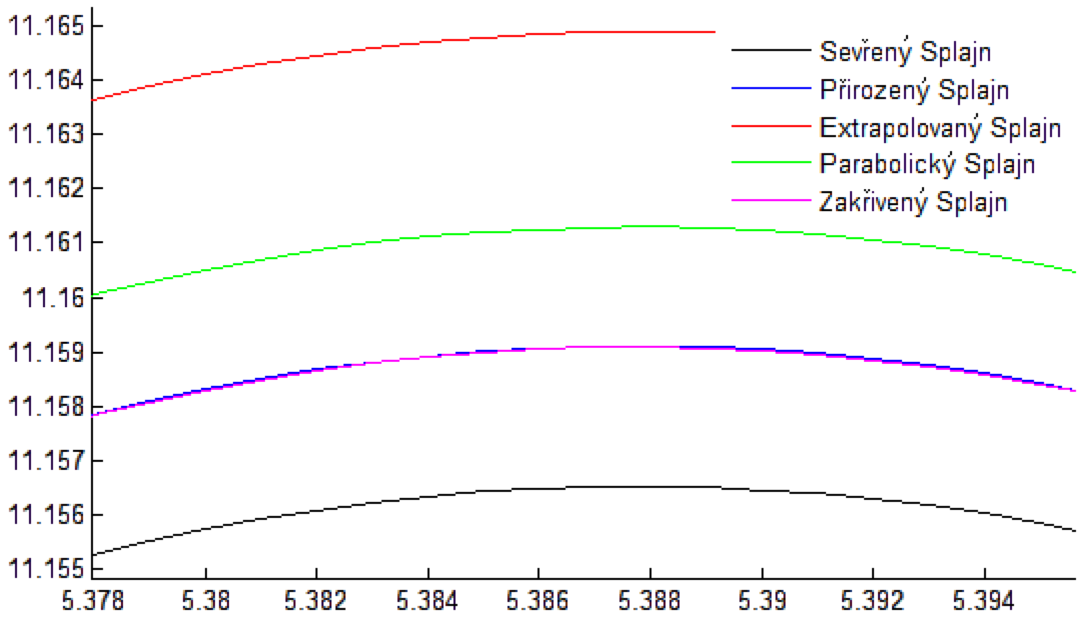
6 Příklad 2

Na grafu porovnejte průběhy výše uvedených typů splajnů, které procházejí 21 body: $[0;-1], [1;-5], [2;9], [3;-4], [4;-8], [5;9], [6;7], [7;-3], [8;5], [9;-3], [10;8], [11;-4], [12;-7], [13;3], [14;6], [15;-7], [16;-8], [17;0], [18;5], [19;-5], [20;4]$.

Průběh splajnů vidíme na obrázku 2. Vliv okrajových podmínek se viditelně projevuje asi v prvních, resp. posledních pěti částech. Při vhodném zvětšení grafu ovšem vidíme, že splajny úplně nesplývají ani směrem doprostřed. Liší se samozřejmě i v analytickém vyjádření. Detail můžeme vidět na obrázku 3.



Obrázek 2
Porovnání splajnů z příkladu 2



Obrázek 3
Detail z obrázku 2

7 Ukázky vybraných M-souborů v Matlabu

7.1 Konstrukce přirozeného kubického splajnu S(x) pro N+1 bodů $\{(x_k; y_k)\}_{k=0}^{N}$.

```
function S=Prirozeny_k_Splajn(X,Y)
%Vstup      X...vektor x-ových souřadnic bodu
%           Y...vektor y-ových souřadnic bodu
%           S''(x0)=0
%           S''(xn)=0
%Výstup     S řádek s koeficienty kubického splajnu v opačném pořadí
  N=length(X)-1;          %délka vektoru X
  H=diff(X);              %výpočet diferencí
  D=diff(Y)./H;
  A=H(2:N-1);
  B=2*(H(1:N-1)+H(2:N));
  C=H(2:N);
  U=6*diff(D);
  for k=2:N-1
        temp=A(k-1)/B(k-1);
        B(k)=B(k)-temp*C(k-1);
        U(k)=U(k)-temp*U(k-1);
  end
  M(N)=U(N-1)/B(N-1);
  for k=N-2:-1:1
        M(k+1)=(U(k)-C(k)*M(k+2))/B(k);
  end
  M(1)=0;                                     %počáteční podmínky
  M(N+1)=0;
                                              %výpočet koeficientů splajnu
  for k=0:N-1
        S(k+1,1)=(M(k+2)-M(k+1))/(6*H(k+1));
        S(k+1,2)=M(k+1)/2;
        S(k+1,3)=D(k+1)-H(k+1)*(2*M(k+1)+M(k+2))/6;
        S(k+1,4)=Y(k+1);
  end
end
```

7.2 Konstrukce zakřiveného kubického splajnu S(x) pro N+1 bodů $\{(x_k; y_k)\}_{k=0}^{N}$.

```
function S=Zakriveny_k_Splajn(X,Y,ddx0,ddxn)
%Vstup      X...vektor x-ových souřadnic bodů
%           Y...vektor y-ových souřadnic bodu
%           ddx0...druhá derivace v x0
%           ddxn...druhá derivace v xN
%Výstup     S řádek koeficienty kubického splajnu v opačném pořadí

  N=length(X)-1;
  H=diff(X);
  D=diff(Y)./H;
  A=H(2:N-1);
  B=2*(H(1:N-1)+H(2:N));
  C=H(2:N);
  U=6*diff(D);
                              %koncová konstrukce zakřiveného splajnu
  U(1)=U(1)-H(1)*ddx0;
  U(N-1)=U(N-1)-H(N)*ddxn;
  for k=2:N-1
        temp=A(k-1)/B(k-1);
        B(k)=B(k)-temp*C(k-1);
        U(k)=U(k)-temp*U(k-1);
  end
  M(N)=U(N-1)/B(N-1);
  for k=N-2:-1:1
        M(k+1)=(U(k)-C(k)*M(k+2))/B(k);
  end

  M(1)=ddx0;                                   %počáteční podmínky
  M(N+1)=ddxn;
                                               %výpočet koeficientů splajnu
  for k=0:N-1
        S(k+1,1)=(M(k+2)-M(k+1))/(6*H(k+1));
        S(k+1,2)=M(k+1)/2;
```

```
            S(k+1,3)=D(k+1)-H(k+1)*(2*M(k+1)+M(k+2))/6;
            S(k+1,4)=Y(k+1);
  end
end
```

7.3 Možné příkazy pro vykreslení splajnu

```
SP=Prirozeny_k_Splajn(X,Y);
  for i=1:N
        x=X(i):.001:X(i+1); y=polyval(SP(i,:),x-X(i));
        hold on
        plot(x,y,'b');
  end
SZ=Zakriveny_k_Splajn(X,Y);
  for i=1:N
        x=X(i):.001:X(i+1); y=polyval(SZ(i,:),x-X(i));
        hold on
        plot(x,y,'b');
  end
```

8 Závěr

K interpolaci funkcí procházejících danými body můžeme použít kubické splajny. Jejich výhodou je minimalizace oscilačního průběhu aproximační funkce, její hladkost a spojitost derivací až do druhého řádu. Názorně na příkladech byly porovnány průběhy jednotlivých typů splajnů a ukázány jejich konstrukce.

Na numerických příkladech použití rozdílných okrajových podmínek pro aproximaci kubickými splajny jsme ukázali, že se pak nemění jen průběh splajnů v krajních intervalech, ale získáváme zcela odlišné splajnové funkce (viz. obrázek č. 1). Náš příklad je ukázkou toho, že z formálního vyjádření algoritmu nelze snadno odvodit širší okruh jeho vlastností. Velmi podobné základní výpočetní algoritmy funkcí mohou reprezentovat jejich dost širokou třídu, zde s různě velkými oscilacemi.

V dostupné české literatuře (Vitásek, Maroš, Horová atd.) se většinou setkáváme jen s přirozenými splajny. Další typy splajnů lze nalézt v cizojazyčné literatuře (např. Mathews, Fink).

Uvedené komentované výpisy funkcí v Matlabu budou použity ve výuce předmětu Numerické metody na DFJP UPCE.

References

[1] MATHEWS, John – FINK, Kurtis. *Numerical Methods Using MATLAB.* Pearson Prentice Hall 2004, fourth edition. ISBN 0-13-191178-3.
[2] RALSTON, Antony. *Základy numerické matematiky.* Academia Praha 1978.
[3] VITÁSEK, Emil. *Numerické metody.* SNTL 1987.
[4] KARBAN, Pavel. *Výpočty a simulace v programech Matlab a Simulink.* Computer Press 2006. ISBN 80-251-1301-9.
[5] Chapra, Steven – Canale, Raymond. *Numerical methods for Engineers.* McGraw-Hill 2006, International Edition, fifth edition, ISBN 007-124429-8.
[6] MAROŠ, Bohumil – MAROŠOVÁ, Marie. *Numerické metody I.* VUT Brno, Akademické nakladatelství Cerm, s.r.o. Brno 2003, ISBN 80-214-2388-9.
[7] HOROVÁ, Ivana – Zelinka, Jiří. *Numerické metody.* MU Brno 2004, druhé vydání. ISBN 80-210-3317-7.

Autor:
Mgr. Jiří Kulička, University of Pardubice, Jan Perner Transport Faculty, Department of Informatics in Transport, Studentská 95, 532 10 Pardubice, Czech Republic, tel.: +420 466 036 428, E-mail: jiri.kulicka@upce.cz