

# VYUŽITÍ MATLABU PRO POTLAČENÍ PROSAKOVÁNÍ ENERGIE VE SPEKTRU PŘI DFT SPEKTRÁLNÍ ANALÝZE INTERPOLACÍ V ČASOVÉ OBLASTI

*Miloš Sedláček*

České vysoké učení technické v Praze  
Fakulta elektrotechnická, katedra měření

## 1. Úvod

Jedním z problémů při spektrální analýze signálů pomocí diskrétní Fourierovy transformace (DFT, v praxi nejčastěji realizované jako rychlá Fourierova transformace - FFT) je prosakování energie ve spektru, označované běžně anglickým termínem „leakage“. Projevuje se zejména při spektrální analýze periodických průběhů, pokud odebrané vzorky nepokrývají celistvý počet period signálu. Nejhorší případ prosakování nastává, pokud je navzorkován úsek signálu délky celého počtu period a navíc půlperiody. Protože DFT předpokládá periodické opakování navzorkovaného průběhu, liší se pochopitelně Fourierova řada periodického prodloužení sejmuté části průběhu od Fourierovy řady periodického prodloužení jedné periody nebo celého počtu period signálu. V případě sinusového signálu se tento jev projeví tím, že v pásmu frekvencí od nuly do poloviny vzorkovací frekvence je spektrum tvořeno řadou čar místo jediné. Prostředím, ve kterém lze pohodlně analyzovat a potlačovat tento jev je MATLAB a Signal Processing Toolbox MATLABu.

## 2. Prosakování energie ve spektru a metody jeho snižování.

Snižít leakage lze vynásobením signálu vhodným oknem, které ve většině případů nabývá plynule nulových hodnot na obou koncích (angl. „tapered window“). Periodické prodloužení takto upraveného signálu má potlačené skoky v obálce posloupnosti vzorků a čáry v DFT spektru způsobené prosakováním mají menší délky. Spektrum je proto tvarově bližší spektru správnému. Vynásobení signálu oknem ovšem mění také délky správných čar spektra i efektivní hodnotu a výkon signálu. Dokonalejší metody proto spektrum upravují nejen vynásobením oknem v časové oblasti, ale navíc i interpolací ve frekvenční oblasti.

Druhou možností je nepoužívat úpravy signálu oknem, ale upravit navzorkovaný úsek signálu tak, aby pokryl celistvý počet period a na tento úsek teprve aplikovat transformaci DFT. K tomu je nejprve nutné určit dobu periody (nebo frekvenci) signálu, a poté z navzorkovaného úseku vybrat kratší část, zahrnující celý počet period (obvykle jednu). V praxi je navíc výhodné použít pro analýzu algoritmy rychlé Fourierovy transformace (FFT). Protože nejrozšířenější algoritmy FFT vyžadují počet vzorků rovný celistvé mocnině dvou, „převzorkujeme“ softwarově vybraný zkrácený úsek signálu takovou vzorkovací frekvencí, aby počet vzorků byl mocninou dvou. Z matematického hlediska jde o interpolaci signálu v časové oblasti a výběr posloupnosti hodnot z interpolované funkce. Vybrané hodnoty jsou vzorky interpolované funkce a vzorkovací interval této nové posloupnosti je zvolen tak, aby počet vzorků byl mocninou dvou. Pro operaci interpolace signálu obsahuje Signal processing toolbox MATLABu několik možností. Nejjednodušší metodou, vhodnou pro svoji jednoduchost i pro realizaci popsaného postupu pomocí číslicového signálového procesoru, je interpolace lineární.

Uvedené metody snižování prosakování energie ve spektru (zvaného zjednodušeně také „rozmazávání spektra“) popisuje [1]. Tam algoritmy nebyly realizovány v prostředí MATLAB, ale v prostředí LabWindows CVI firmy National Instruments, které je určeno pro aplikaci v měřicích systémech. Pomocí nových toolboxů MATLABu, určených pro zpracování navzorkovaných průběhů v MATLABu [2] a pro řízení měřicích přístrojů z prostředí MATLAB [3] je možno využít rozsáhlých možností MATLABu pro zpracování signálů a grafické presentace výsledků nejen pro signály simulované, ale i pro signály získané měřením.

Tento příspěvek je věnován realizaci popsané metody snížení nejistoty odhadu spektrálních složek signálu působené prosakováním energie ve spektru využitím interpolace v časové oblasti v prostředí MATLAB. Výsledky porovnání obou základních metod (použití oken a interpolace ve frekvenční oblasti a použití useknutí signálu a interpolace v časové oblasti) byly autorem presentovány na 12. mezinárodním symposiu IMEKO TC-4 (Measurement of Electrical Quantities) v září 2002 v Záhřebu [4].

Pro možnost useknutí části navzorkovaného průběhu obsahující celý počet period signálu je nutné zjistit periodu signálu. K tomu existuje velká řada metod, které byly z hlediska jejich neurčitosti

odhadu zkoumány mj. i autorem tohoto příspěvku a jeho spolupracovníky. Podrobný rozbor metody využívající určování průchodů zintegrovaného signálu nulovou úrovní (metoda IZC, čili „integrated zero crossing“) lze nalézt v [5]. Právě tato metoda byla použita pro určení doby periody signálu při simulacích popsáných v tomto příspěvku.

### 3. Struktura simulačního programu

Program využívá několika cyklů a volání dvou do sebe vnořených funkcí. Na začátku se zadá vzorkovací frekvence a počet vzorkovaných period signálu. Tím je určena časová osa. Program je připraven tak, že se navzorkuje  $N + 0,5$  periody, kde  $N$  je celé kladné číslo, čili jde o případ z hlediska leakage nejnepříznivější. Protože jsme chtěli vyšetřit mj. vliv vzorkovací frekvence (počet vzorků na periodu signálu) na nejistotu měření, opakovali jsme simulace pro 32, 64, 128, 256 a 512 vzorků na periodu, což odpovídá při jmenovité frekvenci signálu 50 Hz vzorkovacím frekvencím 1600 Hz, 3200 Hz, 6400 Hz, 12800 Hz a 25000 Hz.

Dále se zvolí jedno z mezinárodními normami pro kompatibilitu definovaných prostředí (např. [6]). Pro každé z těchto prostředí jsou definovány tzv. kompatibilní úrovně harmonických složek až do padesáté, a to v procentech základní harmonické. Pro představu o těchto hodnotách uvádím část výpisu z programu, kde vektor `amphar` je vektorem amplitud harmonických složek vztahených k základní harmonické:

```
amphar=[100 3 6 1.5 8 1 7 1 2.5 1 5 1 4.5 1 2 1 4 1 4 1 1.75 1 3.5 ...
1 3.5 1 1 1 3.08 1 2.98 1 1 1 2.8 1 2.73 1 1 1 2.59 1 ...
2.53 1 1 1 2.42 1 2.37 1]/100;
%prostredi tridy 3:prumyslove prostredi,napajeci bod uvnitr zavodu, THD=10%
%IEC 1000-2-4 (EN 61000-2-4) ,kompatibilni urovne pro prumyslove a
neverejne site)
d_amphar=min([fs/50/2length(amphar) fix((fs/(10*2500))*length(amphar))] );
```

Protože frekvence základní harmonické je (přibližně) 50 Hz, může být při nevhodné volbě vzorkovací frekvence pro některé nejvyšší harmonické porušena vzorkovací věta. U popisované metody je navíc pro vychýlení odhadu harmonické menší než 5% nutné odebrat alespoň 10 vzorků na periodu [1]. To platí i pro nejvyšší harmonickou. V programu je zajištěno oříznutí počtu harmonických tak, aby bylo při zvolené vzorkovací frekvenci odebráno 10 vzorků na periodu nejvyšší harmonické – viz poslední dva řádky výpisu části programu. Je tedy použito tzv. převzorkování s koeficientem převzorkování 5. Hodnoty harmonických jsou upraveny vynásobením společným koeficientem tak, aby činitel harmonického zkreslení (THD) dosáhl předepsané úrovně při všech 50 harmonických („nominální činitel THDn“, viz obrázky dále). THD pro v normě uvedené kompatibilní úrovně je totiž vyšší než jmenovitý, protože se nepředpokládá dosažení v normě uvedených hodnot všemi harmonickými. Skutečná hodnota THD je ovšem nižší než jmenovitá i po vynásobení opravným koeficientem pokud je vzorkovací frekvence menší než 25 kHz (odpovídající deseti vzorkům na periodu i pro padesátou harmonickou). To je způsobeno frekvenčním oříznutím signálu zmíněném výše.

Dále je zvolen vektor hodnot poměrů signálu k šumu (SNR), pro které bude provedena simulace. Zde popsané simulace byly prováděny pro SNR 30, 40, 50 a 70 dB. Fáze základní harmonické složky je zvolena nulová, ostatní harmonické mají fázové posuvy rovnoměrně rozloženy v pásmu  $-\pi$ ,  $+\pi$  radiánů a tyto hodnoty se buď náhodně mění při každém běhu simulace,

```
rand('state',sum(100*clock));
fihar=((rand(1,d_amphar)-.5)/.5)*pi;
fihar(1)=0;
```

nebo jsou při opakovaných bězích zachovány.

Ke generovanému signálu je přidán aditivní šum tak, aby bylo dosaženo požadované hodnoty SNR:

```
for k=1:d_amphar,
vi=vi+Amp*ampharTHD(k)*sin(t*k*fb*2*pi+fihar(k));
end
randn('state',sum(100*clock));
sigma=uef/(10^(SNR/20));
```

```

vn=randn(1,N)*sigma;
v_ana=vi+vn;

```

Pak je generovaný signál kvantován ideálním kvantovačem se zvoleným rozlišením (v praxi nejčastěji 12 bitů). Pro jednotlivé harmonické jsou počítány jejich odchylky od (při simulaci známých) ideálních hodnot a to pro probíhající běh simulace, zvolený počet period a SNR. Amplitudy harmonických jsou počítány pomocí volání funkce `irtd(ui, Nn, Ts)`, kde  $u_i$  jsou vzorky signálu,  $N_n$  je nový počet vzorků (po useknutí) a  $T_s$  je vzorkovací interval. My jsme použili  $N_n=1024$ . V této funkci se nejprve určí frekvence signálu signálu metodou IZC využívající průchodů integrovaného signálu nulou [5] pomocí další funkce `IZC(ui, Ts)`. Useknutí průběhu na celistvý počet period se provede pomocí zaokrouhlení funkcí `fix`. K lineární interpolaci mezi vzorky useknuté části průběhu je využita funkce MATLABu `interp1`. Teprve na vzorky takto interpolované funkce, kterých je 1024, je aplikována funkce `fft` a z ní získané spektrum je normováno tak, aby sinusovce s jednotkovou amplitudou odpovídala čára jednotkové délky.

Tyto hodnoty jsou ukládány do čtyřrozměrného pole a statistickým zpracováním podle rozměru odpovídajícího běhu simulace získáme vychýlení odhadu (pomocí MATLABské funkce `mean`) a standardní odchylku, která v měření odpovídá nejistotě typu A. [7]. K tomu využijeme funkce `std`. Pokud chceme získat relativní nejistoty odhadů jednotlivých harmonických (které jsou určovány v dále uvedených obrázcích), ukládáme do pole relativní odchylky harmonických pro jednotlivé běhy simulace.

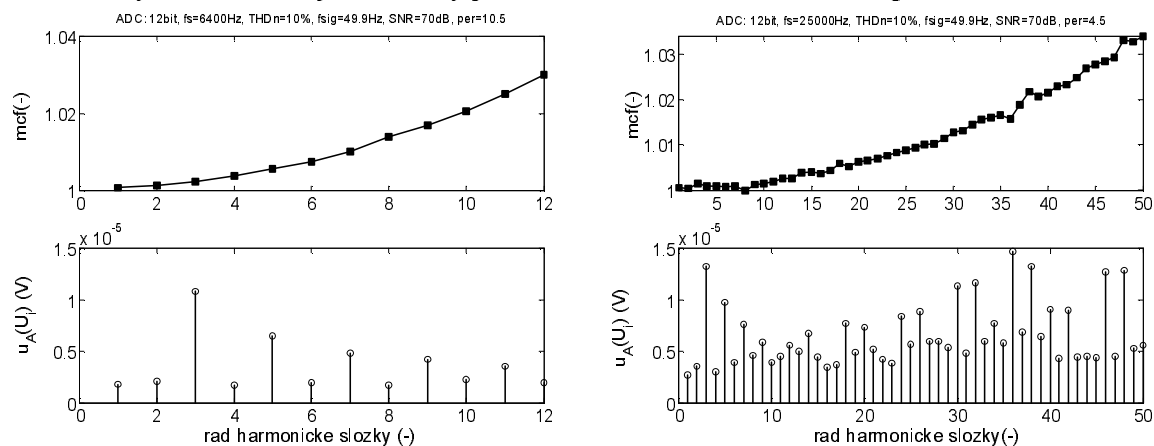
Uvedený postup opakujeme v do sebe vnořených cyklech pro jednotlivé hodnoty SNR a případně frekvence základní harmonické nebo vzorkovací frekvence. Dále uvedené obrázky byly získány pro 100 běhů simulace.

Na závěr jsou generovány a vykresleny obrázky. V tomto případě jsme použili dvourozměrné grafy (generované příkazy `subplot` a `stem`). V horním z každé dvojice obrázků je vynášen multiplikační koeficient („mcf“). Jde o číslo, kterým je nutno vynásobit střední hodnotu odhadu příslušné harmonické složky, abychom odstranili vychýlení odhadu. V dolním z každé dvojice obrázků jsou relativní nejistoty typu A odhadu každé harmonické složky (vyneseny jako bezrozměrné hodnoty, nikoliv tedy v procentech). Některé z uvedených obrázků ukazují více průběhů (buď pro různé vzorkovací frekvence, nebo pro různé hodnoty SNR). K tomu je použito příkazu `hold on`.

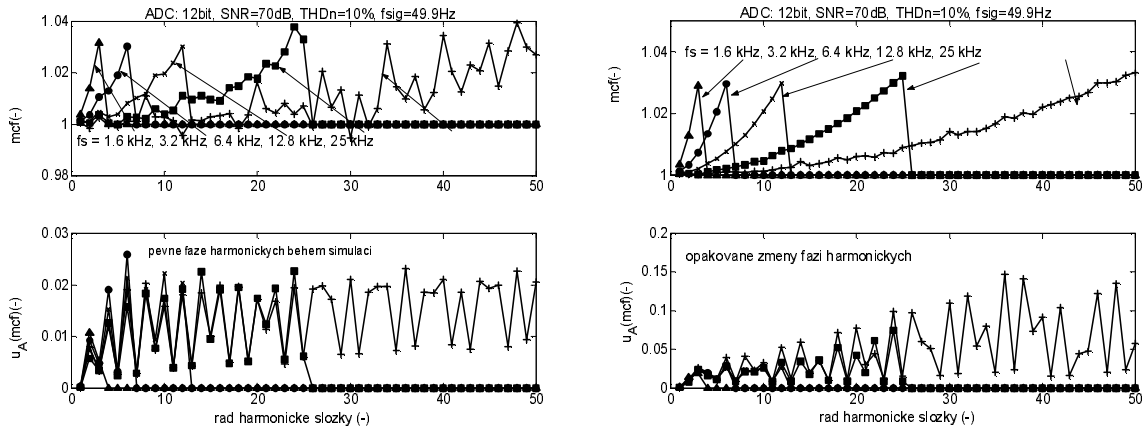
Při simulacích je generováno obvykle velké kvantum obrázků a pro jejich pozdější využití je podstatný jejich dostatečně podrobný popis. Ruční vypisování nadpisu ke každému obrázku je velmi pracné a navíc může být provedeno chybně. Jako velmi užitečná se pro popisy obrázků ukázala funkce `sprintf`, která slouží k zápisu formátovaných dat do řetězce. Tento řetězec se použije jako nadpis obrázku. Tak je zajištěno, že jsou u každého obrázku uvedeny správně hodnoty jednotlivých parametrů použité při dané simulaci.

#### 4. Příklady výsledků simulace.

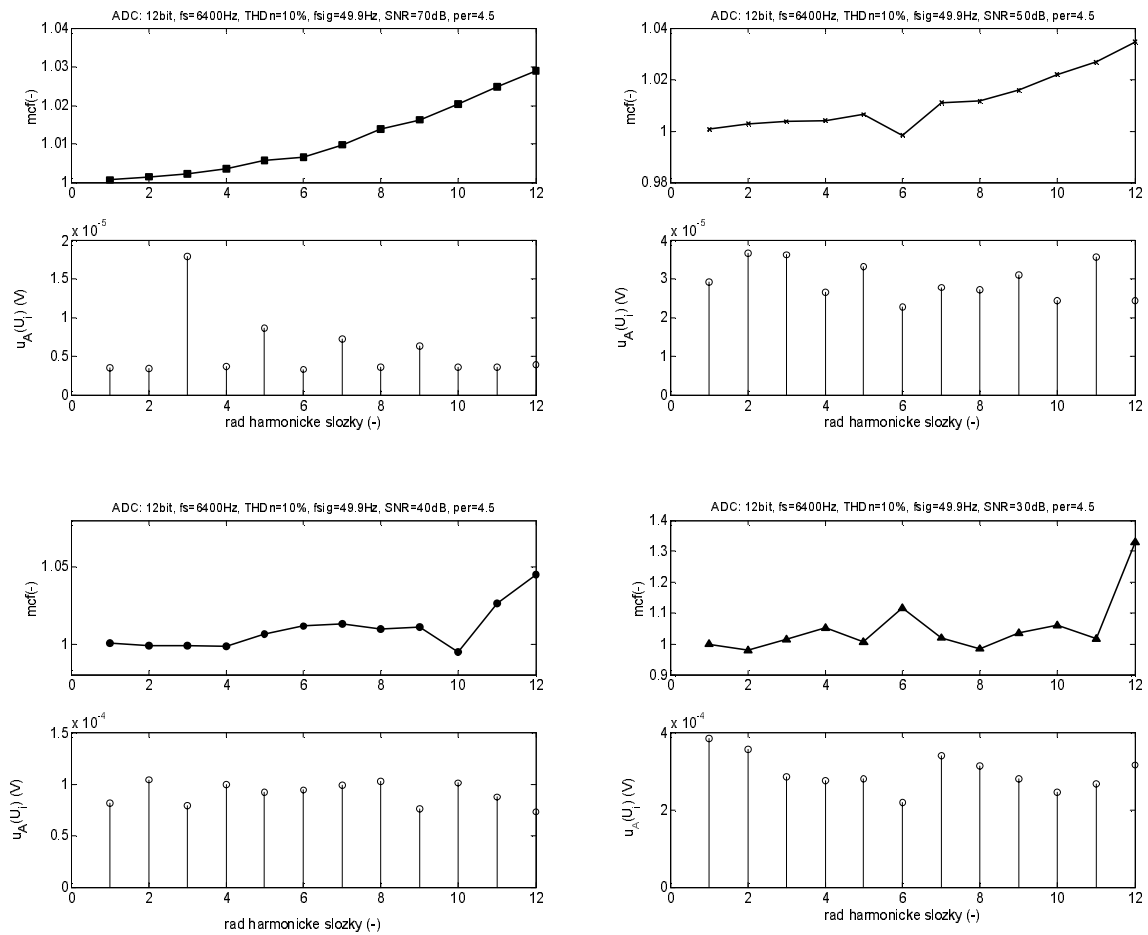
Obrázky uvedené níže jsou získány pro 50 běhů simulace a frekvenci signálu 49.9 Hz.



Obr.1 Multiplikační faktory a relativní nejistoty harmonických pro THD 10% a frekvenci vzorkování 6400 Hz (vlevo) a 25 kHz (vpravo)



Obr.2 Srovnání výsledků simulace pro pět vzorkovacích frekvencí – vlevo fáze harmonických pevné, vpravo měněny náhodně při každém běhu simulace; spodní obrázky: nejistoty multiplikačního činitele



Obr. 3 Výsledky simulací pro čtyři hodnoty SNR (70 dB, 50 dB, 40 dB a 30 dB). Hodnoty multiplikačního činitele a nejistoty dvanácti vypočtených harmonických složek); srovnaj úroveň nejistot harmonických

## 5. Závěr.

Popsaný simulační program je další ukázkou možností prostředí MATLAB a s ním spolupracujících toolboxů, v tomto případě toolboxu Signal Processing. Program je po modifikování

použitelný i pro zpracování vzorků reálného signálu. Ty lze sejmout a zpracovat využitím balíku Data Acquisition Toolbox a některé ze zásuvných DAQ karet do PC s tímto toolboxem spolupracujících.

V naší aplikaci byl simulován vstupní signál včetně šumu a harmonických složek, (ideální) AD převodník a v textu popsaný algoritmus potlačující prosakování ve spektru využitím lineární interpolace signálu v časové oblasti. K prezentaci byly tentokrát využity 2D grafy s generováním nadpisů v obrázcích obsahujících aktuálně použité parametry simulace. Zjištěné hodnoty spektra byly ukládány do čtyřrozměrného pole, odkud je možno statistickým zpracováním prvků podle vhodného rozměru nalézt vychýlení a rozptyl odhadu amplitudové spektrální složky pro každý soubor simulací. Volbou vstupních parametrů lze zkoumat vliv různých ovlivňujících veličin jak pro jednotlivé ovlivňující veličiny se zvolenou hodnotou, tak pro současně působících více ovlivňujících veličin. V posledním případě je v numerickém výpočtu implicitně zahrnuta i případná korelovanost některých veličin. Tu lze jinak (explicitně matematicky) zpracovat velmi obtížně.

V obr.3 je názorně vidět vliv úrovně aditivního šumu na závislost multiplikativního korekčního činitele a úroveň nejistot amplitud harmonických složek. Protože jde o absolutní nejistoty (vyjádřené ve V) a protože simulace byly provedeny pro hodnotu základní harmonické rovnou jednomu voltu, plyne z přehledu relativních amplitud harmonických složek (pole „amphar“ výpisu z programu v odstavci 3) a z obr.3, že relativní nejistota odhadu základní harmonické složky je řádu  $10^{-3}$  až  $10^{-2}$  % (podle úrovně šumu). Nejistoty vyšších harmonických jsou pro zkrácení definované normou [6] přibližně o dva řády vyšší.

### **Poděkování**

Příspěvek byl zpracován v rámci výzkumného záměru číslo J04/98:210000015 na ČVUT v Praze, podporovaného Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy České republiky.

Autor děkuje také Ing. J. Blaškovi, se kterým spolupracoval na přípravě původní verze popsaného programu.

### **Literatura**

- [1] M. Sedláček, M. Titěra: Interpolations in frequency and time domains used in FFT spectrum analysis, Measurement, vol. 23 (1998), pp. 185-193.
- [2] Data Acquisition Toolbox For Use with MATLAB, User's Guide, MathWorks, Inc., Natick, MA, USA, 1999.
- [3] Instrumentation Control Toolbox For Use with MATLAB, MathWorks, Inc., Natick, MA, USA, 2000.
- [4] J. Blaška, M. Sedláček: Uncertainty of Amplitude Spectrum Analysis in Power-Line Systems, Proc. of 12<sup>th</sup> IMEKO TC-4 Symposium – Electrical Measurements and Instrumentation, September 25-27, 2002, Zagreb, Croatia, Symposium Proceedings, part.1, pp. 152-156
- [5] V. Backmutsky, V. Zmudnikov, A. Agizim, G. Vaisman: A new DSP method for precise dynamic measurement of the actual power-line frequency and its data acquisition application, Measurement, vol. 18 (1996), No.3, pp.169-176.
- [6] IEC 1000-2-4 (EN 61000-2-4), Electromagnetic Compatibility, Part.2 – Environment, Compatibility levels in industrial plants for low-frequency conducted disturbances, IEC, Switzerland, 1994
- [7] Guide to Expression of Uncertainty in Measurements, International Organization for Standardization, Switzerland, 1993

**Kontaktní adresa:** Doc. Ing. Miloš Sedláček, CSc.

České vysoké učení technické v Praze, Fakulta elektrotechnická, katedra měření,  
Technická 2, 166 27 Praha 6. Tel: (+420 2)2435 2177, fax: (+420 2) 311 9929

E-mail: [sedlaceM@feld.cvut.cz](mailto:sedlaceM@feld.cvut.cz)