Analýza světla odraženého tenkým kmitajícím zrcadlem s použitím MATLABu

A.Mikš, J.Novák
katedra fyziky, Fakulta stavební, ČVUT v Praze

Abstrakt

Práce se zabývá teoretickou analýzou vibrací tenkého rovinného zrcadla kruhového průřezu a vlivem deformací takovéhoto zrcadla na světlo odražené od zrcadla. Jsou zde uvedeny vztahy pro výpočet deformace zrcadla a dynamické vlnové aberace. Důsledkem deformace zrcadla je též prostorově nehomogenní posuv frekvence odraženého záření. Analýza, výpočty a vizualizace vibrací byla provedena pomocí systému MATLAB.

1. Úvod

V řadě oblastí vědy a techniky se používají tenká zrcadla, která buď kmitají záměrně, nebo jsou jejich kmity vybuzeny vnějším prostředím jako jsou např. vibrace apod. Vlivem těchto kmitů dochází k deformaci plochy zrcadla a to pak má za příčinu deformaci vlnoplochy, která se od tohoto zrcadla odráží. Je-li tato vlnoplocha dále využívána např. k měřícím účelům, bude její deformace ovlivňovat přesnost měření a zcela obdobně se bude deformace vlnoplochy projevovat v případě zobrazení. Cílem této práce je provedení podrobné teoretické analýzy výše popsané problematiky pro případ kruhového tenkého zrcadla, které se v praxi nejčastěji objevuje a ukázat k jakým deformacím vlnoplochy dochází a jak se toto projevuje na kriteriích používaných pro hodnocení kvality optických soustav a prvků jako je např. Strehlova definice. Dále též je v práci zkoumána problematika frekvenčního posuvu světla odraženého od takto deformovaného zrcadla.

2. Výpočet vibrací tenkého zrcadla

Uvažujme kmity $u = u(x,y,t)$ *tenkého kruhového rovinného zrcadla* o poloměru R, které je na obvodě vetknuté a jehož obvod kmitá, ve směru normály k jeho ploše, podle vztahu $u = \alpha \sin \Omega t$, kde (x,y) jsou pravoúhlé souřadnice, t značí čas, α je amplituda kmitů okraje zrcadla a Ω je úhlová frekvence těchto kmitů (**Obr.1**). Tenké kruhové zrcadlo můžeme považovat za membránu. Rovnice pro kmitání zrcadla má pak tvar *vlnové rovnice* [1,2]

$$\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 u(x,y,t),$$

kde ∇^2 je dvourozměrný Laplaceův operátor. Vzhledem k tomu, že zrcadlo má kruhový tvar, bude pro řešení této rovnice výhodnější užít polárních souřadnic r a ϑ. Vlnová rovnice má pak tvar

$$\frac{\partial^2 u(r,\vartheta,t)}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 u(r,\vartheta,t), \qquad (1)$$

kde

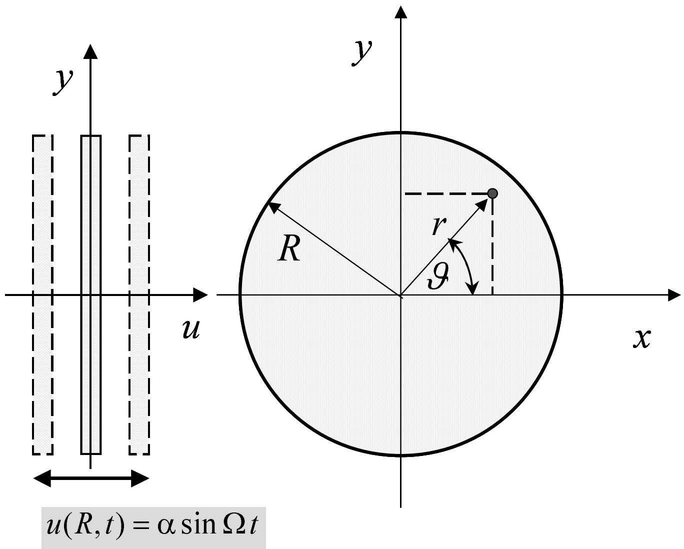
$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \ ,$$

je dvourozměrný Laplaceův operátor v polárních souřadnicích. Dále požadujme, aby funkce u splňovala následující nehomogenní *okrajové podmínky*:

a) hraniční podmínky: $u(R,\vartheta,t)=\alpha\sin\Omega t$, (2)

b) počáteční podmínky: $u(r,\vartheta,0)=0$, $\partial u(r,\vartheta,0)/\partial t=0$, (3)

tj. požadujme, aby se výchylka a rychlost v čase t = 0 rovnaly nule.



Obr.1: Schéma vibrujícího zrcadla

Řešení rovnice (1) hledejme ve tvaru

$$u=f+g\ , \tag{4}$$

kde funkce $f(r,t)=F(r)\sin\Omega t$ je řešením rovnice (1) splňujícím výše uvedenou hraniční podmínku (2). Dosazením funkce $f(r,t)$ do rovnice (1) dostaneme

$$f(r,t)=\alpha\frac{J_0\left(\frac{\Omega}{a}r\right)}{J_0\left(\frac{\Omega}{a}R\right)}\sin\Omega t\ . \tag{5}$$

Nyní hledejme tvar funkce g. Předně musí funkce g splňovat vlnovou rovnici

$$\frac{\partial^2 g(r,\vartheta,t)}{\partial t^2}=a^2\nabla^2 g(r,\vartheta,t)\ . \tag{6}$$

Dále pak musí splňovat následující okrajovou podmínku:

$$u(R,\vartheta,t)=f(R,t)+g(R,\vartheta,t)=F(R)\sin\Omega t+g(R,\vartheta,t)=\alpha\sin\Omega t\ .$$

Uvážíme-li rovnici (5), dostáváme následující *hraniční podmínku pro funkci* $g(r, \vartheta, t)$, tj. musí platit $g(R, \vartheta, t) = 0$.

Všimněme si nyní, jaké počáteční podmínky musí funkce $g(r, \vartheta, t)$ splňovat. Dosadíme-li za funkci u do vztahů (3) výraz (4), dostáváme užitím vztahu (5)

$$u(r, \vartheta, 0) = f(r,0) + g(r, \vartheta, 0) = 0 + g(r, \vartheta, 0) = 0,$$

a

$$g(r, \vartheta, 0) = 0.$$

Dále pak

$$\partial u(r, \vartheta, 0) / \partial t = \partial f(r, 0) / \partial t + \partial g(r, \vartheta, 0) / \partial t = 0$$

a

$$\partial g(r, \vartheta, 0) / \partial t = -\partial f(r, 0) / \partial t .$$

Funkce $g(r, \vartheta, t)$ bude tedy splňovat následující *počáteční podmínky*:

$$g(r, \vartheta, 0) = 0, \quad \partial g(r, \vartheta, 0) / \partial t = -\partial f(r, 0) / \partial t . \tag{7}$$

Rovnici (6) budeme řešit Fourierovou metodou. Výsledné řešení dostaneme jako superpozici, platí

$$g = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} g_{n,m} . \tag{8}$$

kde

$$g_{n,m} = (A_{n,m} \sin a \frac{\mu_{n,m}}{R} t + B_{n,m} \cos a \frac{\mu_{n,m}}{R} t)(C_n \sin n\vartheta + D_n \cos n\vartheta) J_n (\mu_{n,m} \frac{r}{R}), \tag{9}$$

a kde dále $\mu_{n,m}$ je m-tý kořen Besselovy funkce $J_n(x)$ a $kR = \mu_{n,m}$ pro $m = 1,2,3,\ldots$. Zabývejme se nyní řešením pro $n = 0$, které má v praxi největší význam. Označíme-li pro jednoduchost $A_{0,m} = A_m$, $B_{0,m} = B_m$, $\mu_{0,m} = \mu_m$ a položíme-li, bez újmu na obecnosti, $D_n = 1$, dostáváme

$$u(r,t) = \alpha \frac{J_0\left(\frac{\beta}{R} r\right)}{J_0(\beta)} \sin \Omega t + \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_0\left(\frac{\mu_m}{R} r\right) \sin \Omega_m t , \tag{10}$$

kde jsme označili

$$\beta = \frac{\Omega}{a} R, \qquad A_m = \frac{-2\alpha\beta}{J_1(\mu_m)(\mu_m^2 - \beta^2)}, \qquad \Omega_m = \frac{\Omega \mu_m}{\beta} .$$

Podle předchozího vztahu lze provést výpočet vibrací harmonicky kmitajícího tenkého zrcadla ve směru normály k povrchu zrcadla.

3. Výpočet posuvu frekvence záření odraženého od kmitajícího zrcadla

Jelikož se kmitající zrcadlo deformuje, dochází k tomu, že jednotlivé body zrcadla kmitají v čase s různou rychlostí. Rychlost jednotlivých bodů zrcadla můžeme určit derivací posunutí (10) podle času, dostáváme

$$v(r,t) = \frac{\mathrm{d}u(r,t)}{\mathrm{d}t} = \alpha\Omega \frac{J_0\left(\frac{\beta}{R}r\right)}{J_0(\beta)} \cos\Omega t + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \Omega_m J_0\left(\frac{\mu_m}{R}r\right)\cos\Omega_m t\,. \tag{11}$$

Pokud známe prostorové rozdělení rychlosti, potom můžeme určit frekvenční posuv odraženého záření pomocí vztahu pro Dopplerův posuv [5,6]

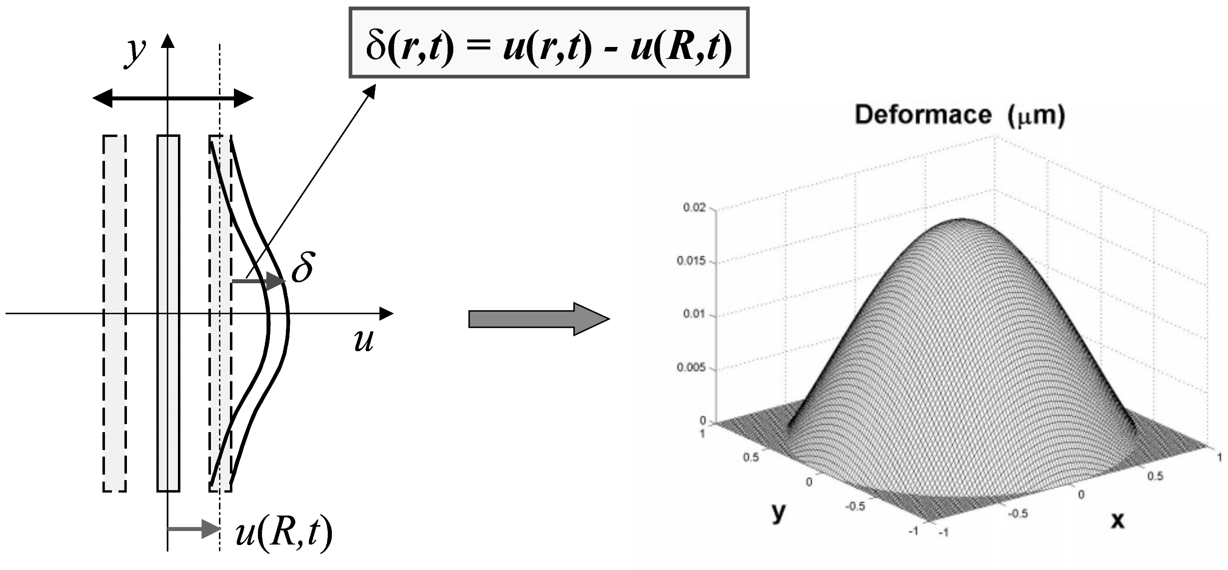
$$\omega' = \omega\left[1 - 2\frac{v(r,t)}{c}\cos\theta\right], \tag{12}$$

kde ω' je frekvence odraženého světla, ω je frekvence dopadajícího světla, c je rychlost světla a θ je úhel dopadu záření na kmitající zrcadlo. Pro malé hodnoty deformací zrcadla je též úhel dopadu θ velmi malý.

4. Výpočet vlnové aberace a Strehlovy definice

Na základě rovnice (10) můžeme snadno vypočítat vlnovou aberaci [3,4,7] tj. deformaci vlnoplochy odražené od kmitajícího tenkého zrcadla vzhledem k vlnoploše na zrcadlo dopadající. Deformace jednotlivých bodů zrcadla vůči rovině procházející okrajem zrcadla ($r = R$) v čase t (**Fig.2**) je dána vztahem

$$\delta(r,t) = u(r,t) - u(R,t)\,, \tag{13}$$



Obr.2: Deformace kmitajícího zrcadla

Pro změnu vlnové aberace platí

$$W(r,t) = 2\delta(r,t) = P(r)\sin\Omega t + \sum_{m=1}^{\infty} Q_m(r)\sin\Omega_m t\,, \tag{14}$$

kde

$$P(r) = 2\alpha\left[\frac{J_0\left(\dfrac{\beta}{R}r\right)}{J_0(\beta)} - 1\right], \quad Q_m(r) = 2A_m J_0\left(\frac{\mu_m}{R}r\right).$$

Strehlova definice [3,5] nám udává normovanou hodnotu intenzity světla ve středu difrakčního obrazce a je dána vztahem

$$I(t) = \left|\frac{1}{S}\iint_S exp\left[ikW(r,t)\right]dS\right|^2, \tag{15}$$

kde integraci provádíme přes plochu S zrcadla, $k = 2\pi/\lambda$ a λ je vlnová délka světla. Pro malé hodnoty vlnové aberace lze Strehlovu definici vyjádřit ve tvaru [3,4]

$$I(t) = 1 - k^2\left(\overline{W^2(t)} - \overline{W(t)}^2\right), \tag{16}$$

kde

$$\overline{W^2(t)} = \frac{1}{S}\iint_S W^2(r,t)dS \quad \text{a} \quad \overline{W(t)} = \frac{1}{S}\iint_S W(r,t)dS\,. \tag{17}$$

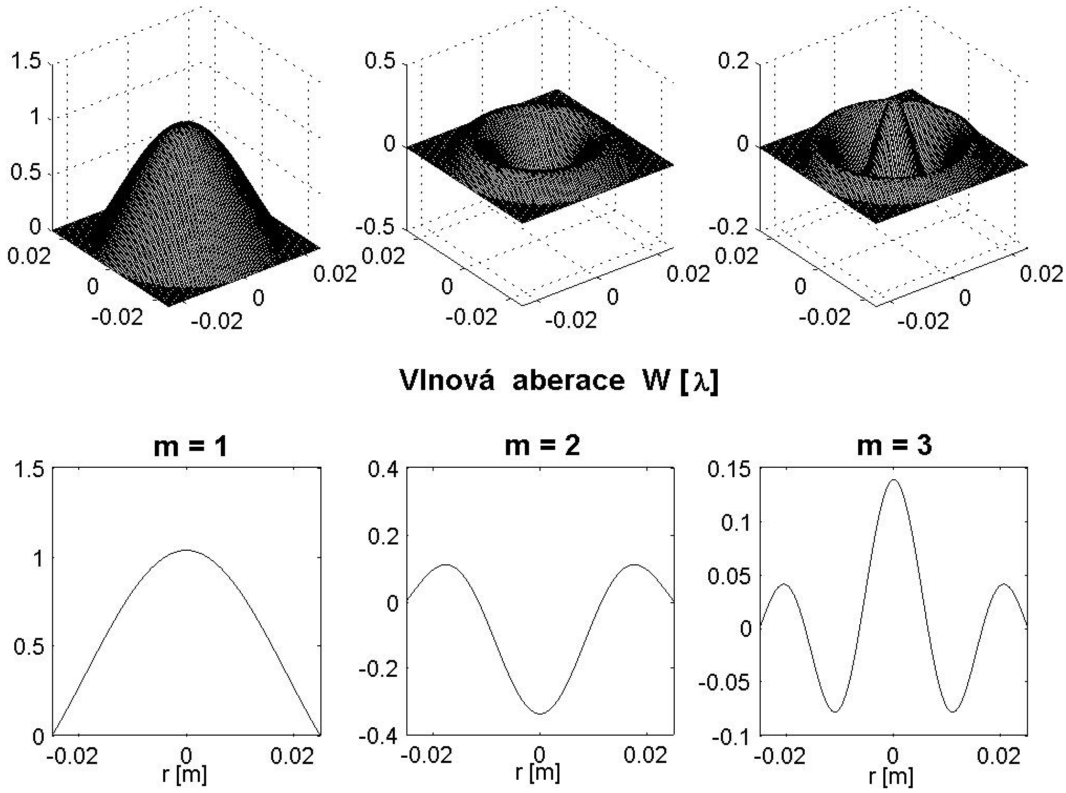
5. Příklad výpočtu vlnové aberace

Ukažme si nyní pro ilustraci průběh vlnové aberace kmitajícího tenkého zrcadla o poloměru R = 25 mm. Amplitudu kmitů volme α = 0,002 mm, frekvenci Ω = 10 s^{-1}, parametr β = 0.06 a vlnovou délku světla λ = 0,000633 mm. Průběh vlnové aberace W pro m = 1,2,3 a $t = \pi R/(2a\mu_m)$ znázorněn na **obr.3**. Vlnová aberace je vyjádřena v násobcích vlnové délky.

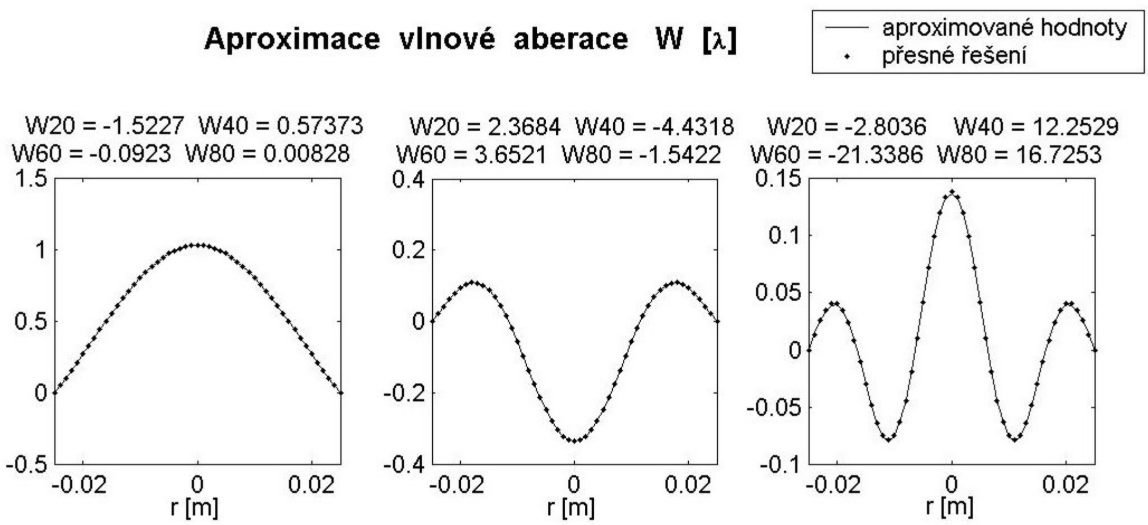
Jak je z obr.3 patrno, je vlnová aberace symetrická vzhledem k ose zrcadla. Můžeme ji tedy, pro danou hodnotu času t (t = konst) aproximovat Seidelovým polynomem pro sférickou vadu užitím metody nejmenších čtverců

$$W = W_{20}\xi^2 + W_{40}\xi^4 + W_{60}\xi^6 + W_{80}\xi^8 + \dots, \qquad \xi = r/R\,, \tag{18}$$

Na **obr.4** je poté provedena aproximace vlnové aberace užitím vztahu (18), s koeficienty W_{20}, W_{40}, W_{60} a W_{80}. Přesné řešení podle (14) je na obrázku vyznačeno tečkami a aproximované hodnoty vlnové aberace pomocí Seidelových polynomů je označeno plnou spojitou čarou. Pro zvýšení přesnosti aproximace, zejména pak u vyšších vibračních modů, musíme užít vyšší řád Seidelových polynomů.



Obr.3: Vlnová aberace způsobená kmitajícím zrcadlem



Obr.4: Aproximace vlnové aberace

Vypočteme-li nyní koeficienty W_{20}, W_{40}, atd., můžeme určit, jak velkou sférickou aberaci zrcadlo zavádí. Výpočet Strehlovy definice podle rovnic (16) a (17) se pak podstatně zjednoduší, dostáváme

$$\begin{aligned}\overline{W^2} - \overline{W}^2 = {} & \frac{1}{12}W_{20}^2 + \frac{4}{45}W_{40}^2 + \frac{9}{112}W_{60}^2 + \frac{16}{225}W_{80}^2 + \frac{1}{6}W_{20}W_{40} + \\ & + \frac{3}{20}W_{20}W_{60} + \frac{2}{15}W_{20}W_{80} + \frac{1}{6}W_{40}W_{60} + \frac{16}{105}W_{40}W_{80} + \frac{3}{20}W_{60}W_{80}\end{aligned} \tag{19}$$

Dosazením (19) do (16) pak lze vypočítat hodnotu Strehlovy definice kmitajícího tenkého zrcadla.

5. Závěr

Práce se zabývala podrobnou analýzou vlastností kmitajícího tenkého zrcadla z hlediska jeho zobrazovacích vlastností. Byl odvozen obecný vztah pro výpočet vlnové aberace kmitajícího tenkého zrcadla. Tento vztah je pak možno použít pro výpočet Strehlovy definice. Byl uveden příklad výpočtu vlnové aberace kmitajícího tenkého zrcadla a ukázán způsob výpočtu Seidelových koeficientů charakterizujících sférickou aberaci zavedenou tímto zrcadlem a výpočet Strehlovy definice pomocí těchto koeficientů. Dále byl uveden vztah pro určení frekvenčního posuvu odraženého záření od takto kmitajícího zrcadla.

Práce byla vypracována za podpory grantů GA ČR 103/03/P001 a GAČR 202/02/0314 .

Literatura

1. L.D.Landau, E.M.Lifshitz, *Theory of elasticity*, Course in Theoretical Physics, Vol.7, Pergamon Press, Oxford 1970.
2. K.F.Riley, M.P.Hobson, S.J.Bence, *Mathematical Methods for Physics and Engineering*. Cambridge University Press, Cambridge 2002.
3. M.Born, E.Wolf, *Principles of Optics*. Pergamon Press, Oxford 1968.
4. A.Miks, *Applied Optics*. Czech Technical University Press, Prague 2000.
5. B.E.A.Saleh, M.C.Teich, *Fundamentals of Photonics*, J.Wiley&Sons, New York 1991.
6. L.D.Landau, E.M.Lifshitz, *The classical theory of fields*, Pergamon Press, New York 1976.
7. A.Miks, J.Novak, Imaging properties of vibrating flat mirror, Proc. SPIE Vol.5144, Washington 2003, p.401-408.

Doc.RNDr.Antonín Mikš,CSc , Katedra fyziky, FSv ČVUT, Thákurova 7, 166 29 Praha 6.
Tel: 224354948, Fax: 2233333226, E-mail: miks@fsv.cvut.cz

Ing.Jiří Novák,PhD, Katedra fyziky, FSv ČVUT, Thákurova 7, 166 29 Praha 6.
Tel: 224354435, Fax: 2233333226, E-mail: novakji@fsv.cvut.cz