APLIKÁCIA SOFTVÉRU MATLAB VO VÝUČBE MATEMATIKY NA VYSOKEJ ŠKOLE TECHNICKÉHO ZAMERANIA

Andrea Mojžišová. Author1, Jana Pócsová. Author2

Ústav riadenia a informatizácie výrobných procesov, Fakulta baníctva, ekológie, riadenia a geotechnológií, Technická univerzita v Košiciach

Abstrakt

V tomto príspevku sa venujeme problematike výučby základného kurzu matematiky na vysokých školách v softvéri Matlab. Tento základný kurz je rozdelený na dve oblasti: lineárna algebra a funkcia jednej reálnej premennej. Príspevok je zameraný na prezentáciu našich skúseností s výučbou tohto predmetu v prostredí Matlab na Technickej univerzite v Košiciach, Fakulte baníctva, ekológie, riadenia a geotechnológií v prvom ročníku bakalárskeho štúdia. Priblížime jeho konkrétne využitie na príkladoch z lineárnej algebry s dôrazom na spôsoby riešenia sústav lineárnych rovníc. Ukážeme niekoľko úloh a demonštrujeme možnosti riešenia niekoľkých problémových úloh z oblasti týkajúcich sa využitia vektorov a matíc. Pri funkcii reálnej premennej sa zameriame na komplexné riešenie priebehu funkcie jednej premennej.

1 Úvod

O vysokoškolské štúdium technického zamerania majú záujem nielen študenti, ktorí maturovali z matematiky a teda vo štvrtom ročníku mali intenzívnu prípravu z tohto predmetu, ale aj študenti s ročnou „prestávkou" v matematike. Táto prestávka sa následne prejavuje v ich schopnostiach a zručnostiach používať základný aparát, nevyhnutný pre pochopenie základných matematických pojmov. Zároveň je vytvorený priestor pre pomerne nehomogénnu skupinu študentov v jednej študijnej skupine. Táto diferenciácia študentov rôznych škôl sa prejavuje hlavne v posledných rokoch a výrazne rastie, preto je dôležité tento fenomén včas podchytiť a riešiť. Časovú dotáciu jednotlivých predmetov, hlavne matematiky na prvom stupni vysokoškolského štúdia, nie je možné z rôznych dôvodov pružne zvyšovať podľa aktuálnej potreby študentov, preto je nutné pristupovať k iným možnostiam. Jednou z nich je zavedenie nových technológií, metód a foriem do výučby.

Ústav Riadenia a informatizácie výrobných procesov zabezpečuje výučbu matematických predmetov pre prvý stupeň vysokoškolského štúdia na fakulte BERG (Fakulta baníctva, ekológie, riedenia a geotechnológií) Technickej univerzity v Košiciach. Nosným premetom prvého ročníka bakalárskeho štúdia na fakulte je predmet Matematika 1. Tento základný kurz je rozdelený na dve oblasti: lineárna algebra a funkcia jednej reálnej premennej.

Ako bolo spomenuté, v súčasnej dobe klasická výučba dostatočne nerieši nehomogénnosť skupín študentov a samotný priebeh cvičení nie je pre študentov dostatočne trendový. Rozvoj IKT v spoločnosti prispieva k zmene pohľadu aj na klasické „ručné" rátanie príkladov. Na vysokých školách technického zamerania je zaujímavé a žiadané integrovať do výučby práve softvér Matlab [3].

2 Matematika 1

Ako bolo spomenuté moderným trendom súčasnej doby je aj riešenie matematických úloh a príkladov pomocou vhodných matematických softvérov. Tento trend uplatňujeme aj v predmete Matematika 1 a to počas výučby, cvičeniami, ktoré kombinujú klasické metódy riešenia a riešenie pomocou matematických softvérov. Hlavný dôraz sa kladie na softvér Matlab, ktorý v rámci fakulty využívame aj v iných predmetoch.

Obsah predmetu Matematika 1 je rozdelený do 13-tich týždňov zimného semestra prvého ročníka bakalárskeho štúdia. A je organizovaný v nasledujúcich vyučovacích jednotkách:

- 2 hodín prednášok a
- 3 hodín cvičení.

V súčasnosti na tento základný kurz matematiky je zapísaných 300 študentov študujúci v 11-tich rôznych študijných programoch.

Počas výučbovej časti semestra študenti získajú základné vedomosti, schopnosti a zručnosti v manipulácii so základnými pojmami z oblasti:

1. lineárnej algebry - vektory, matice, determinant matice, inverzná matica, spôsoby riešenia sústav lineárnych rovníc,
2. a funkcie jednej reálnej premennej – základné vlastnosti funkcií, postupnosti, výpočet limít postupnosti, limita funkcie a spôsoby jej výpočtu, spojitosť funkcie, derivácia funkcie a jej geometrický a fyzikálny význam, vyšetrovanie priebehu funkcie, výpočet neurčitého a určitého integrálu a ich základné aplikácie.

Z oblasti lineárnej algebry za kľúčové považujeme schopnosť vyriešiť sústavu lineárnych rovníc použitím jednej univerzálnej a dvoch metód aplikovaných v špeciálnych prípadoch:

1. Gaussova eliminačná metóda, ktorej základná myšlienka je založená na ekvivalentných úpravách matíc a vytvorení ekvivalentného systémy rovníc s pôvodným.
2. Cramerovým pravidlom metóda aplikovateľná v špeciálnom prípade. Tato metóda je založená na výpočte determinantov.
3. Pomocou inverznej matice, ďalšia z metód aplikovateľných v špeciálnom prípade, kde základom tejto metódy je maticový zápis sústavy lineárnych rovníc, vyjadrenie inverznej matice sústavy (pomocou adjungovanej matice algebrických doplnkov alebo pomocou blokovej matice) a následne násobenie inverznej matice s maticou pravej strany.

Z oblasti funkcie jednej reálnej premennej za kľúčové považujeme schopnosť vyšetriť priebeh funkcie.

Preto aj pri zapájaní matematického softvéru do výučby kladieme dôraz práve na tieto oblasti. Keďže spôsob výpočtu sústav lineárnych rovníc pomocou Gaussovej eliminačnej metódy považujeme za univerzálny, preto jeho osvojenie prebieha predovšetkým ručne.

3 Riešenie sústavy lineárnych rovníc v Matlabe

Sústavu rovníc [1]:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. \tag{1}$$

nazývame sústavou m lineárnych (algebraických) rovníc (LR) o n neznámych, kde $a_{11}, \dots, a_{mn}$ sú koeficienty sústavy (reálne čísla), $x_1, \dots, x_n$ sú neznáme a čísla $b_1, \dots, b_m$ na pravej strane nazývame absolutnými členmi.

Sústavu LR možno zapísať v maticovom $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ a } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Riešenie sústav lineárnych rovníc pomocou metódy Cramerovo pravidlo a riešenie sústav lineárnych rovníc pomocou inverznej matice je možné realizovať len za podmienky, že determinant matice sústavy je rôzny od nuly. Za takejto podmienky očakávame riešenie sústavy lineárnych rovníc v tvare usporiadanej n-tice. Pričom n - je počet rovníc a zároveň počet neznámych sústavy lineárnych rovníc.

3.1 Cramerovo pravidlo

Majme sústavu lineárnych rovníc so štvorcovou maticou sústavy. Ak determinant D sústavy lineárnych rovníc je rôzny od nuly, tak systém lineárnych rovníc má práve jedno riešenie $x_1, \dots, x_n$ dané vzťahmi

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \dots, x_n = \frac{D_n}{D}, \tag{2}$$

pričom D_i sú determinanty matíc, ktoré dostaneme tak, že i-tý stĺpec v matici $\mathbf{A}$ nahradíme stĺpcom pravých strán.

Postup riešenia sústavy lineárnych rovníc pomocou Cramerovho pravidla v Matlabe:
Predpokladajme, že $m = n$, t.j. daná je nasledujúca sústava lineárnych rovníc

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{3}$$

1. Zadáme maticu sústavy A.

```
A=[a11,a12,..,a1n; ..;an1,an2,..,ann]
```

2. Zistíme determinant matice sústavy.

```
det(A)
```

3. Zadáme vektor pravých strán B.

```
B=[b1,b2,..,bn]
```

4. Ak je determinant matice sústavy rôzny od nuly, tak zadáme a vypočítame $D_1, D_2, \dots, D_n$. Ak je determinant matice rovný nule, nemôžeme použiť nasledujúci postup.

```
D1= [B, A(:,2:4)]
det(D1)
...
Di=[A(:, 1:(i-1),B, A(:,n)]
det(Di)
```

5. Následne vypočítame neznáme pomocou vzťahov $x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \ldots, x_n = \frac{D_n}{D}$.

```
x1=det(D1)/det(A)
...
xn=det(Dn)/det(A)
```

Príklad: Riešte sústavu lineárnych rovníc

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & = & -2 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 8 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 4 \end{array}$$

Riešenie:

```
>> A=[1 2 -1 -2; 2 1 1 1; 1 -1 -1 1; 1 2 2 -1] %Zadame maticu sustavy
>> det(A) %Vypocitame determinant matice sustavy
>> B=[-2; 8; 1; 4] %Zadame vektor pravych stran
>> D1= [B, A(:,2:4)]  %Nahradime prvy stlpec matice A, vektorom pravych stran
>> det(D1) %Vypocitame determinant D1
>> x1=det(D1)/det(A) %Vypocitame neznamu x1
>> D2= [A(:,1), B, A(:,3:4)] %Nahradime druhy stlpec matice A, vektorom pravych stran
>> det(D2) %Vypocitame determinant D2
>> x2=det(D2)/det(A) %Vypocitame neznamu x2
>> D3=[A(:, 1:2),B, A(:,4)] %Nahradime treti stlpec matice A, vektorom pravych stran
>> det(D3) %Vypocitame determinant D3
>> x3=det(D3)/det(A) %Vypocitame neznamu x3
>> D4=[A(:,1:3), B] %Nahradime stvrty stlpec matice A, vektorom pravych stran
>> det(D4) %Vypocitame determinant D4
>> x4=det(D4)/det(A) %Vypocitame neznamu x4
```

3.2 Riešenie sústavy lineárnych rovníc pomocou inverznej matice

Predpokladajme, že k matici $\mathbf{A}$ existuje inverzná matica $\mathbf{A}^{-1}$. Ak vynásobíme rovnicu $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ maticou $\mathbf{A}^{-1}$ (zľava) dostávame

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}) &= \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \\ (\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{X} &= \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \\ \mathbf{X} &= \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}\,. \end{aligned}$$

Postup riešenia sústavy lineárnych rovníc pomocou inverznej matice v Matlabe [2]:

Tak ako v predchádzajúcom prípade riešime nasledujúcu sústavu lineárnych rovníc

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{array} \right. \tag{4}$$

1. Zadáme maticu sústavy A.

```
A=[a11,a12,..,a1n; ..;an1,an2,..,ann]
```

2. Zistíme determinant matice sústavy.

```
det(A)
```

3. Ak je determinant rôzny od nuly pokračujeme zadaním vektora pravých strán, v opačnom prípade končíme.

```
B=[b1,b2,..,bn]
```

4. Vypočítame inverznú maticu k matici A a označíme ju C.

```
C=inv(A)
```

5. Samotný výpočet matice X.

```
X=C*B
```

Príklad: Riešte sústavu lineárnych rovníc

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & = & -2 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 8 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 4 \end{array}$$

Riešenie:

```
>> A=[1 2 -1 -2; 2 1 1 1; 1 -1 -1 1; 1 2 2 -1] %Zadame maticu sustavy
>> det(A) %Vypocitame determinant matice sustavy
>> B=[-2; 8; 1; 4] %Zadame vektor pravych stran
>> C=inv(A) %Vypocitame inverznu maticu k matic A a oznacime ju pismenom C
>> X=C*B %Vypocitame maticu X
```

3.3 Riešenie lineárnych rovníc, ak determinant matice sústavy je nulový a riešenie poddeterminovaného a predeterminovaného systému

Ak je determinant matice sústavy nulový, alebo ak je počet rovníc nižší alebo vyšší ako počet neznámych, t.j. hovoríme o poddeterminovanom alebo predeterminovanom systéme, nie je možné použiť vyššie predstavené metódy.

V tomto prípade je k výpočtu možné použiť Frobeniovú vetu, ktorej základnou myšlienkou je porovnanie hodnoty matíc, a to hodnosti rozšírenej matice s hodnosťou matice sústavy.

Frobeniová veta: Nech $\mathbf{A}$ je matica sústavy lineárnych rovníc o n neznámych a $\overline{\mathbf{A}}$ je rozšírená matica sústavy lineárnych rovníc. Sústava lineárnych rovníc má riešenie vtedy a len vtedy, ak $\mathsf{rank}(\mathbf{A}) = \mathsf{rank}(\overline{\mathbf{A}})$. Naviac,

- ak $\mathsf{rank}(\mathbf{A}) = \mathsf{rank}(\overline{\mathbf{A}}) = n$, tak sústava lineárnych rovníc má jedno riešenie;
- ak $\mathsf{rank}(\mathbf{A}) = \mathsf{rank}(\overline{\mathbf{A}}) < n$, tak sústava lineárnych rovníc má nekonečne veľa riešení.

Postup riešenia sústavy lineárnych rovníc poddeterminovaného a predeterminovaného systému v Matlabe:

Je daná sústava lineárnych rovníc:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right. \tag{5}$$

1. Zadáme maticu sústavy A.

```
A=[a11,a12,..,a1n; ..;am1,am2,..,amn]
```

2. Zadáme vektor pravých strán B.

```
B=[b1,b2,..,bm]
```

3. Zadáme rozšírenú maticu sústavy.

```
Ar=[a11,a12,..,a1n,b1; ..;am1,am2,..,amn,bm]
```

alebo

```
Ar=[A,B]
```

4. Vypočítame hodnosť matice sústavy a rozšírenej matice sústavy.

```
rank(A)
rank(Ar)
```

5. Ďalej pokračujeme podľa Frobeniovej vety, teda porovnáme hodnosť sústav, ak sú rozdielne sústava lineárnych rovníc nemá riešenie, ak sú rovnaké a zhodné s počtom neznámych tak má sústava jedno riešenie, ak sú hodnosti menšie ako počet neznámych sústava má nekonečne veľa riešení. V druhom a treťom prípade pokračujeme ďalej riešením.
6. Upravíme rozšírenú maticu na redukovaný schodkovitý tvar.

```
>> rref(Ar)
```

7. Z redukovaného tvaru vidíme, či má sústava rovníc jedno alebo nekonečne veľa riešení. Ak má sústava jedno riešenie zadáme jeho riešenie nasledujúcim príkazom.

```
X=A\B
```

8. Ak má sústava nekonečne veľa riešení, vhodne zvolíme voľnú neznámu (alebo neznáme), ktorú vynecháme, t.j. nebudeme hľadať pre ňu riešenie.

```
[x1,..,xn]=solve('1.rovnica','2.rovnica',..,'m. rovnica')
```

Príklad: Riešte sústavu lineárnych rovníc

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
 & & 2x_2 & + & 4x_3 & - & 3x_4 & = & 6 \\
2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 0 \\
x_1 & + & 5x_2 & + & 13x_3 & & & = & 8 \\
2x_1 & + & 3x_2 & + & 7x_3 & - & 2x_4 & = & -5
\end{array}$$

```
>> A=[0 2 4 -3; 2 1 3 1; 1 5 13 0; 2 3 7 -2]  %Zadame maticu sustavy
>> det(A) %Vypocitame determinant matice sustavy
>> %Kedze determinant je rovny 0,nie je mozne pouzit Cramerovo pravidlo
>> %ani riesenie pomocou inverznej matice.
>> Ar=[0 2 4 -3 6; 2 1 3 1 0; 1 5 13 0 8; 2 3 7 -2 -5] %Rozsirena matica sustavy
>> rank(A) %Vypocitame hodnost matice sustavy
>> rank(Ar) %Vypocitame hodnost rozsirenej matice sustavy
>> %Kedze hodnost tychto matic je rozna, podla Frobeniovej vety sustava linearnych
>> %rovnic nema riesenie.
```

Príklad: Riešte sústavu lineárnych rovníc

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 8 \\ 2x_1 & - & 6x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 10 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & + & 8x_3 & - & x_4 & = & -2 \end{array}$$

Riešenie:

```
>> A=[3 -4 1 2; 2 -6 -2 3; 4 2 8 -1] %Zadame maticu sustavy
>> %Kedze matica nie je stvorcova, nie je mozne pouzit Cramerovo pravidlo
>> %ani riesenie pomocou inverznej matice.
>> Ar=[3 -4 1 2 8; 2 -6 -2 3 10; 4 2 8 -1 -2] %Rozsirena matica sustavy
>> rank(A) %Vypocitame hodnost matice sustavy
>> rank(Ar) %Vypocitame hodnost rozsirenej matice sustavy
>> %Kedze hodnost tychto matic je rovnaka, ale mensia ako pocet neznamych,
>> %podla Frobeniovej vety sustava linearnych ma nekonecne vela rieseni.
>> B=[8; 10; -2] %Zadame vektor pravych stran.
>> rref(Ar)
>> [x, y, z]=solve('3*x-4*y+z+2*u=8', '2*x-6*y-2*z+3*u=10', '4*x+2*y+8*z-u=-2')
```

4 Riešenie priebehu funkcie v Matlabe

Pri vyšetrovaní priebehu funkcie bez softvéru dodržiavame nasledujúcu štruktúru:

$$\text{Z predpisu funkcie určíme: } \begin{cases} 1. & \text{definičný obor,} \\ 2. & \text{párnosť, nepárnosť, periodičnosť funkie,} \\ 3. & \text{priesečníky s osou } x \text{ a osou } y, \\ 4. & \text{určíme body nespojitosti,} \\ 5. & \text{asymptoty so smernicou, asymtoty bez smernice.} \end{cases}$$

$$\text{Z prvej derivácie určíme: } \begin{cases} 6. & \text{stacionárne body,} \\ 7. & \text{intervaly, na ktorých funkcie rastie, klesá,} \\ 8. & \text{lokálne extrémy funkcie.} \end{cases}$$

$$\text{Z druhej derivácie určíme: } \begin{cases} 9. & \text{inflexné body funkcie,} \\ 10. & \text{intervaly, na ktorých je funkcia konkávna, konvexná.} \end{cases}$$

11. Nakreslíme graf funkcie.

V softvérovom riešení priebehu funkcie je kladený vyšší dôraz na schopnosť študentov pracovať s grafom funkcie a z neho popísať dôležité vlastnosti funkcie. Pri vyšetrovaní priebehu funkcie klasicky, teda ručne, je cieľom znázornenie grafu funkcie.

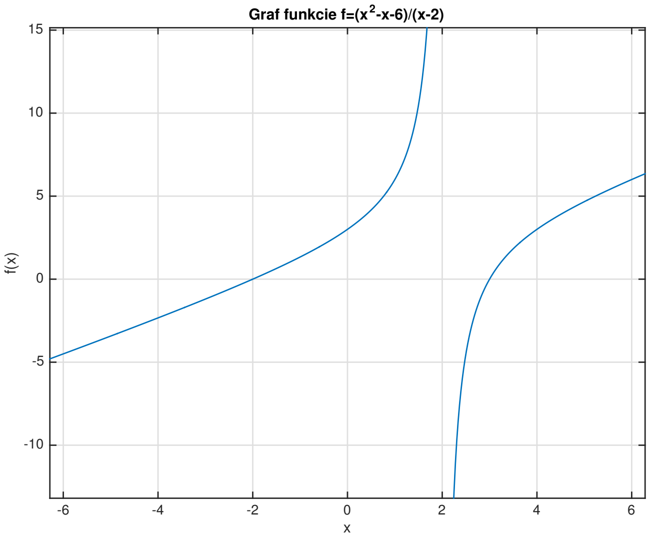
Riešenie priebehu funkcie si ukážeme na komplexnom príklade.

Príklad: Vyšetrite priebeh funkcie:

$$f = \frac{x^2 - x - 6}{x - 2}$$

Riešenie:
K výpočtu použijeme symbolický toolbox syms x.

```
>> f=(x^2-x-6)/(x-2)
%  graf funkcie je
>> ezplot(f); grid on
```



Obr. 1: Graf funkcie

Z grafu funkcie (Obr. 1) je možné určiť:

1. $D(f) = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$.
2. Má asymptoty so smernicou aj bez smernice. Asymptota bez smernice je zjavná, a to priamka $x = 2$. Asymptotu so smernicou vyjadríme.
3. Funkcia nie je ani párna ani nepárna a je spojitá na definičnom obore.
4. Funkcia f je na $D(f)$ rastúca a nemá žiadne lokálne extrémy.
5. Funkcia f je na intervale $(-\infty, 2)$ konvexná a na intervale $(2, \infty)$ je konkávna. Nemá žiaden inflexný bod.

Všetky tieto závery overíme aj výpočtom.

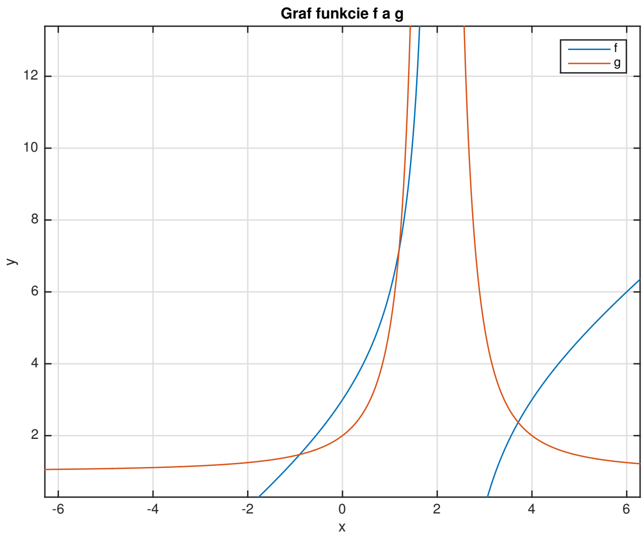
Prvá derivácia funkcie:

```
>> g=diff(f,x,1)
>> % Uprava
>> simplify(g)

>> %Prva derivacia sa rovna nule, t.j. kandidat na stacionarny bod.
>> solve(g)
```

Z výpočtu vidíme, že riešenie je komplexné, teda funkcia nemá žiadne stacionárna body. Spojíme do jedného obrázka grafy oboch funkcií, t.j. graf pôvodnej funkcie aj jej prvej derivácie.

```
>> ezplot(f); grid on;
>> hold on;
>> ezplot(g);
```



Obr. 2: Graf funkcie a prvej derivácie funkcie

Červený graf je graf prvej derivácie funkcie (Obr. 2). Na definičnom obore je prvá derivácia kladná, teda funkcia f je na celom definičnom obore rastúca. Druhá derivácia funkcie f sa vypočíta nasledovne:

```
>> h=diff(f, x, 2)
>> % Upravime vyraz
>> simplify(h)
>> % Vidno, ze neexistuje inflexny bod funkcie f, lebo
>> solve(h)
```

Vykreslíme graf druhej derivácie spolu s grafom funkcie f:

```
>> ezplot(f); grid on
>> hold on
>> ezplot(h)
```

Červená funkcia je funkcia h, t.j druhá derivácia funkcie f (Obr. 3). Vidíme, že na intervale $(-\infty, 2)$ je druhá derivácia kladná, teda funkcia f je na tomto intervale konvexná. Na intervale $(2, \infty)$ je funkcia h (druhá derivácia funkcie f) záporná, teda funkcia f je na tomto intervale konkávna. Ešte vyjadríme rovnice asymptot (Obr. 4):

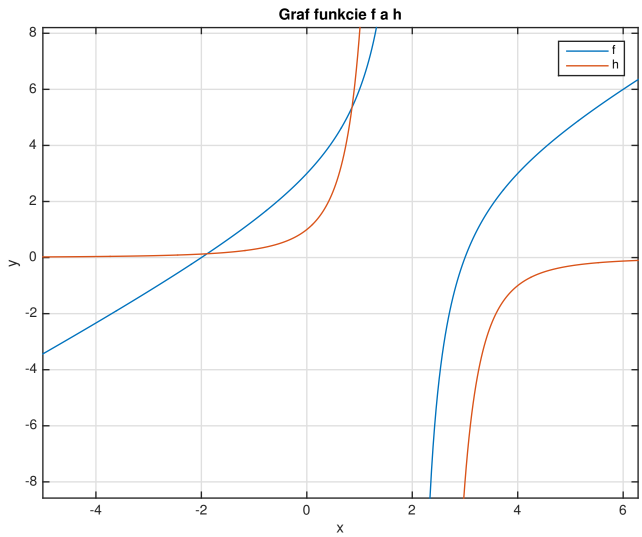
```
>> % Asymptoty bez smernice x=2
>> limit(f, x, 2, 'left')
>> limit(f, x, 2, 'right')
>> % Asymptoty so smernicou y=kx+q, kde k=lim (f(x)/x)
>> limit(f\x, x, inf)
>> limit(f\x, x, -inf)
>> % g= lim(f-kx)
```

```
>> limit(f-x, x, inf)
>> limit(f-x, x, -inf)
>> %asymptota so smernicou ma rovnicu y=x+1
>> u=x+1
>> ezplot(f); grid on;
>> hold on;
>> ezplot(u)
```

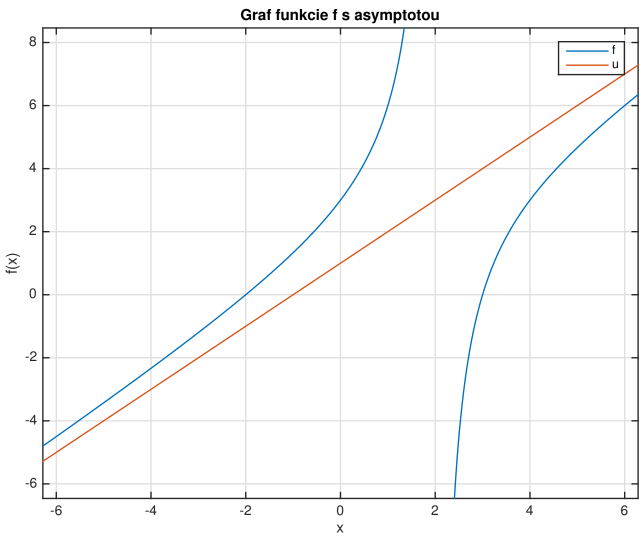
Ďalšie príklady vhodné na riešenie počas vyučovacích jednotiek a na samostatnú prácu študentov sú zverejnené na stránke `http://web.tuke.sk/fberg-blended/`.

5 Záver

Do výučby predmetu Matematika 1 na vysokej škole technického zamerania sme zaradili softvér Matlab, pričom výučba tohto predmetu prebiehala kombinovanou formou. Táto kombinovaná forma pozostávala z dvoch častí. Najprv boli základné pojmy a ich vlastnosti de-



Obr. 3: Graf funkcie a druhej derivácie funkcie



Obr. 4: Graf funkcie s asymptotou

monštrované na jednoduchých príkladoch, pričom študenti realizovali všetky výpočty iba ručne. Následne boli zložitejšie výpočty realizované s využitím softvéru.

Tento spôsob sme zvolili preto, lebo sa domnievame, že vhodne kombinuje klasické vzdelávanie, kde študent najprv pochopí základ problematiky klasickou formou a tieto vedomosti sú následne upevnené v riešení výpočtovo zložitejších úloh s využitím softvéru. Domnievame sa, že len samotné využívanie softvéru vedie často k neschopnosti študentov odhaliť chybu v riešení. Naše skúsenosti s vedením kombinovaného kurzu Matematiky 1 potvrdzujú, že zavedenie takejto výučby nekomplikuje obsah samotnej výučby o programovanie v softvéri Matlab, lebo pri realizácií výpočtov v softvéri Matlab je potrebné osvojenie pomerne malého počtu základných príkazov. Naše skúsenosti potvrdzujú, že schopnosť študentov pracovať s jednotlivými pojmami z oblasti lineárnej algebry a funkcie jednej reálnej premennej je na rovnakej alebo o niečo vyššej úrovni ako pri tradičnej výučbe.

Tieto pozorovania potvrdili aj výsledky záverečnej kontroly z predmetu Matematika 1 ako aj celková spokojnosť študentov s takouto formou štúdia predmetu Matematika 1 na našej fakulte.

Poďakovanie

Tento príspevok vznikol s podporou grantov VEGA č. 1/0529/15 a č. 1/0908/15, KEGA č. 040TUKE-4/2014 a bol podporovaný Agentúrou na podporu výskumu a vývoja na základe zmluvy č. APVV-0482-11 a č. APVV-14-0892.

Literatúra

[1] A. Mojžišová J. Pócsová. *Matematika 1 (prvá časť)*. TU, Košice, prvé vydanie edition, 2014.

[2] B. Doňar K. Zaplatílek. *Matlab pro začátečníky*. Technická literatúra BEN, Praha, druhé vydanie edition, 2005.

[3] Z. Varga M. Varga. Utilizing Matlab in secondary technical education. *MIPRO, 2010 Proceedings of the 33rd International Convention*, pages 970–974, 2010.

Author1
B. Němcovej 3, 042 00 Košice, Slovenská Republika
e-mail:andrea.mojzisova@tuke.sk

Author2
B. Němcovej 3, 042 00 Košice, Slovenská Republika
e-mail:jana.pocsova@tuke.sk