VIZUALIZÁCIA MATEMATICKÉHO OBSAHU V PROSTREDÍ MATLAB

Andrea Mojžišová [1], *Jana Pócsová* [2]

Ústav riadenia a informatizácie výrobných procesov, Fakulta baníctva, ekológie, riadenia a geotechnológií, Technická univerzita v Košiciach

Abstrakt

Pojem vizualizácia poznáme ako grafické znázornenie, vizuálnu predstavivosť, alebo proces interpretovania na vizuálnu/viditeľnú formu. Vizualizácia ako prostriedok moderného vzdelávania má dve základné funkcie a to podpora učenia a pochopenia pojmov pri analýze a riešení problémov [4]. Rozsiahle výskumy ukazujú, že vizualizácia môže vylepšiť štandardne zavádzané pojmy a odporúčajú implementovať vizualizáciu do výučby. Ďalej indikujú, že študenti prejavujú aktívny záujem o výučbu, ktorá zahŕňa vizualizácie založené na modernej výučbe. Matematické predmety sú zvyčajne interpretované ako najťažšie vo všetkých stupňoch vzdelávania, vysokoškolské nevynímajúc. Preto sa snažíme využívať v rámci výučby všetky dostupné moderné metódy, formy, technológie a prostriedky, aby sme čo najefektívnejšie sprístupnili obsah preberaného učiva cieľovej skupine študentov. Keďže riešenie úloh z oblasti analytickej geometrie ako aj funkcie dvoch premenných vyžaduje schopnosť vizualizácie, implementovali sme jej prvky do kurzu Matematika 2. Príspevok je zameraný na problematiku vizualizácie kľúčových pojmov z oblasti analytickej geometrie a funkcie dvoch premenných v softvéri Matlab v rámci kurzu Matematika 2 na Technickej univerzite v Košiciach, Fakulte baníctva, ekológie, riadenia a geotechnológií v druhom ročníku bakalárskeho štúdia. V príspevku priblížime konkrétne spôsoby riešenia jednotlivých úloh v softvéri Matlab, ako aj komplexne vytvorené riešenie vo forme výučbových videí.

1 Úvod

Matematické predmety sú zvyčajne interpretované ako najťažšie vo všetkých stupňoch vzdelávania, vysokoškolské nevynímajúc. Preto sa snažíme využívať v rámci výučby všetky dostupné moderné metódy, formy, technológie a prostriedky, aby sme čo najefektívnejšie sprístupnili obsah preberaného učiva cieľovej skupine študentov.

Obsah kurzu Matematika 2 na Technickej univerzite v Košiciach, Fakulte baníctva, ekológie, riadenia a geotechnológií v druhom ročníku bakalárskeho štúdia je rozdelený do 13 týždňov letného semestra prvého ročníka bakalárskeho štúdia. Tento predmet je určený pre približne 45 študentov ročne študujúcich v 2 študijných programoch (Geodézia a kataster nehnuteľností a Geodézia a geografické informačné systémy) a jeho obsah je prispôsobený cielene študijným potrebám tejto úzkej skupiny študentov.

Časová dotácia pre tento kurz je:

- 2 vyučovacie hodiny prednášok a
- 2 vyučovacie hodiny cvičení.

V kurze Matematika 2 študenti získajú základné vedomosti, schopnosti a zručnosti z dvoch nosných oblastí a to:

1. Analytická geometria:
   a) geometrická interpretácia vektora,

b) grafické znázornenie bodov v rôznych súradnicových sústavách, transformácie súradníc v 2D a v 3D,

c) analytická geometria v 2D, vyjadrenie priamky, kužeľosečky (kružnica, elipsa, parabola, hyperbola) a určenie ich vzájomnej polohy,

d) analytická geometria v 3D, vyjadrenie priamky, roviny, kvadratickej plochy (elipsoid, hyperboloid, paraboloid, atď.) a určenie ich vzájomnej polohy.

2. Funkcie dvoch premenných:

   a) definičný obor funkcie dvoch premenných,

   b) limita funkcie dvoch premenných a spôsoby výpočtu limít, spôsoby dôkazu neexistencie limity funkcie, spojitosť funkcie dvoch premenných,

   c) parciálne derivácie funkcie prvého a druhého rádu a geometrická interpretácia parciálnej derivácie,

   d) lokálne, viazané a globálne extrémy funkcie dvoch premenných,

   e) gradient a derivácia v smere.

Výučba v kurze Matematika 2 prebieha kombinovanou formou:

1. Priamo - interakcia učiteľ - žiak na vyučovacích hodinách (prednášky, cvičenia). V rámci prednášok sa študenti oboznámia zo základnými definíciami jednotlivých kľúčových pojmov. Tieto základné vlastnosti sú často demonštrované na riešeniach typových úloh v priebehu cvičení.

2. Nepriamo - elektronická forma vzdelávania prebieha individuálne u jednotlivých študentov samostatnou prácou. Študenti majú prístup k prednáškam v elektronickej forme ako aj k videám k jednotlivým prednáškam. Okrem prednášok majú študenti k dispozícii zbierku komentovaných riešených príkladov, ktorá doplňa cvičenia z predmetov.

Vzhľadom k povahe kurzu, kde je potrebné viaceré pojmy vizualizovať, takéto riešenie nestačí. Vizualizácia je dôležitá súčasť výučby najmä prírodovedných predmetov.

2 Vizualizácia

Pojem vizualizácia znamená grafické znázornenie alebo vizuálnu predstavivosť, alebo proces interpretovania na vizuálnu alebo viditeľnú formu.

Poznáme nasledujúce druhy vizualizácie[4]:

- Vizualizácia objektov – ide o vizualizáciu vo forme obrázkov, 3D modelov, simulácií, animácií, atď.
- Introspektívna vizualizácia – je ponímaná ako imaginárna predstavivosť študentov.
- Interpretovaná vizualizácia – stvárňuje, interpretuje vizualizácie objektov alebo introspektívnej vizualizácie v súvislosti k skúsenostiam alebo chápaniu študentov. Zlepšuje pochopenie preberanej látky v dôsledku interakcie s vizualizáciou objektu.

Vizualizácia ako prostriedok moderného vzdelávania má dve základné funkcie: podpora učenia a pojmov pri analýze a riešení problémov. Výskumy ukazujú, že niektoré typy vizualizácií môžu vylepšiť alebo nahradiť slovné či textové vysvetlenia pojmov a odporúčajú implementovať vizualizáciu do výučby, kombinovať ju s textovým a slovným vysvetlením, pričom je potrebné zamerať sa na samotný objekt a obsah vizualizácie. Ďalej indikujú, že študenti prejavujú aktívny záujem o výučbu, ktorá zahŕňa vizualizácie založené na modernej výpočtovej technike [4].

V rámci spomínaného kurzu sme využili vizualizáciu ako prostriedok moderného vzdelávania vo vytvorených videách z prednášok. No vzhľadom na povahu obsahu kurzu toto riešenie nebolo dostatočné a muselo byť doplnené o ďalšie prvky vizualizácie pri riešení úloh, ktoré slúžia na podporu pochopenia jednotlivých matematických pojmov z oblasti analytickej geometrie a funkcie dvoch reálnych premenných.

Za týmto účelom boli vytvorené videá zo simulácií príkladov v prostredí Matlab.

3 Vizualizácia v Analytickej geometrii

Oblasť analytickej geometrie v kurze je rozsiahla, na demonštrovanie implementácie vizualizácie do tejto oblasti sme vybrali tému Kvadratické útvary v 2D, t.j. elipsa, hyperbola a parabola.

Pri riešení príkladov z analytickej geometrie, konkrétne kvadratických útvarov v 2D sa zameriavame na riešenie príkladov typu:
Daná je všeobecná rovnica kužeľosečky. Určte o akú kužeľosečku ide. Popíšte jej základne charakteristiky (súradnice ohnísk, stredu, hlavných a vedľajších vrcholov) a zobrazte ju.

Najprv si predstavíme teoretický základ jednotlivých geometrických útvarov a následne postup riešenia v Matlabe.

Pri výpočte budeme používať všeobecný tvar kužeľosečky

$$a_v x^2 + b_v y^2 + c_v x + d_v y + e_v = 0, \tag{1}$$

ktorý prepíšeme do stredového tvaru:

$$\begin{aligned}
a_v x^2 + b_v y^2 + c_v x + d_v y + e_v &= 0\\
a_v x^2 + c_v x + b_v y^2 + d_v y + e_v &= 0\\
a_v\left(x^2 + \frac{c_v}{a_v}x\right) + b_v\left(y^2 + \frac{d_v}{b_v}y\right) + e_v &= 0\\
a_v\left[x^2 + \frac{c_v}{a_v}x + \left(\frac{c_v}{2a_v}\right)^2 - \left(\frac{c_v}{2a_v}\right)^2\right] + b_v\left[y^2 + \frac{d_v}{b_v}y + \left(\frac{d_v}{2b_v}\right)^2 - \left(\frac{d_v}{2b_v}\right)^2\right] + e_v &= 0\\
a_v\left(x + \frac{c_v}{2a_v}\right)^2 - a_v\left(\frac{c_v}{2a_v}\right)^2 + b_v\left(y + \frac{d_v}{2b_v}\right)^2 - b_v\left(\frac{d_v}{2b_v}\right)^2 + e_v &= 0\\
a_v\left(x + \frac{c_v}{2a_v}\right)^2 + b_v\left(y + \frac{d_v}{2b_v}\right)^2 &= -e_v + a_v\left(\frac{c_v}{2a_v}\right)^2 + b_v\left(\frac{d_v}{2b_v}\right)^2\\
\frac{\left(x + \frac{c_v}{2a_v}\right)^2}{\frac{\frac{c_v^2}{4a_v} + \frac{d_v^2}{4b_v} - e_v}{a_v}} + \frac{\left(y + \frac{d_v}{2b_v}\right)^2}{\frac{\frac{c_v^2}{4a_v} + \frac{d_v^2}{4b_v} - e_v}{b_v}} &= 1
\end{aligned}$$

Pri riešení budeme teda používať nasledujúci stredový tvar kužeľosečiek:

$$\frac{\left(x + \frac{c_v}{2a_v}\right)^2}{\frac{\frac{c_v^2}{4a_v} + \frac{d_v^2}{4b_v} - e_v}{a_v}} + \frac{\left(y + \frac{d_v}{2b_v}\right)^2}{\frac{\frac{c_v^2}{4a_v} + \frac{d_v^2}{4b_v} - e_v}{b_v}} = 1 \tag{2}$$

3.1 Elipsa

Elipsa je množina všetkých bodov v rovine, ktoré majú od dvoch pevných bodov (tie ozn. F_1 a F_2) konštantný súčet vzdialeností (ozn. $2a$), pričom ten je väčší ako vzdialenosť pevných dvoch bodov. Označujeme $E(F_1, F_2, 2a)$. Symbolicky túto definíciu zapisujeme nasledovne

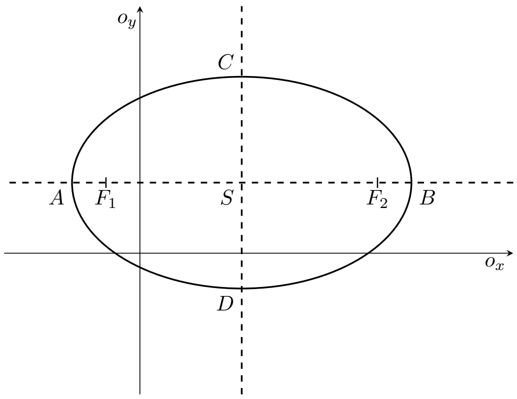
$$|XF_1| + |XF_2| = 2a, \tag{3}$$

kde F_1 a F_2 sú ohniská elipsy, X je ľubovoľný bod elipsy.

Základné prvky elipsy:

S	stred elipsy
F_1, F_2	ohniská
A, B	hlavné vrcholy elipsy
C, D	vedľajšie vrcholy elipsy
o_1	hlavná os elipsy, t.j. priamka prechádzajúca bodmi F_1 a F_2
a	dĺžka hlavnej poloosi elipsy, t.j. $a = \|AS\| = \|SB\|$
o_2	vedľajšia os elipsy, t.j. priamka kolmá na hlavnú os elipsy prechádzajúca stredom elipsy
b	dĺžka vedľajšej poloosi elipsy, t.j. $b = \|SC\| = \|SD\|$
e	ohnisková vzdialenosť resp. fokálna excentricita $e = \|SF_1\| = \|SF_2\|$

Tvar elipsy:

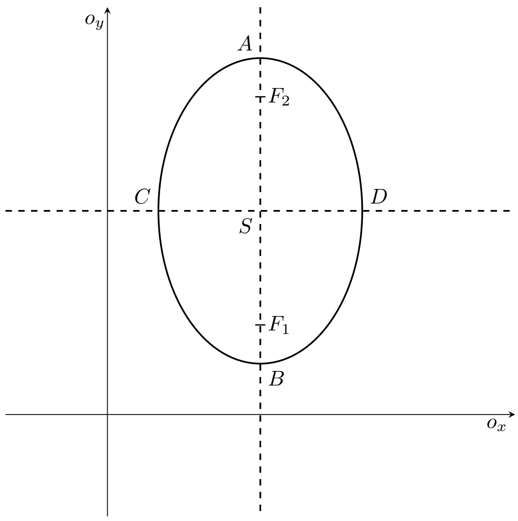


Elipsa, ktorej ohniská ležia na priamke rovnobežnej s osou x

Stredová rovnica: $\dfrac{(x-m)^2}{a^2} + \dfrac{(y-n)^2}{b^2} = 1$

Stred v bode $S = [m, n]$

a-hlavná poloos, b-vedľajšia poloos



Elipsa, ktorej ohniská ležia na priamke rovnobežnej s osou y

Stredová rovnica: $\dfrac{(x-m)^2}{b^2} + \dfrac{(y-n)^2}{a^2} = 1$

Stred v bode $S = [m, n]$

a-hlavná poloos, b-vedľajšia poloos

Na základe (2) vyjadríme a, b, m a n stredovej rovnice elipsy, pre:

1. elipsu, ktorej ohniská ležia na priamke rovnobežnej s osou x:
   $a = \sqrt{\frac{\frac{c_v^2}{4a_v} + \frac{d_v^2}{4b_v} - e_v}{a_v}}$, $b = \sqrt{\frac{\frac{c_v^2}{4a_v} + \frac{d_v^2}{4b_v} - e_v}{b_v}}$, $m = -\frac{c_v}{2a_v}$, $n = -\frac{d_v}{2b_v}$,
2. elipsu, ktorej ohniská ležia na priamke rovnobežnej s osou y:
   $a = \sqrt{\frac{\frac{c_v^2}{4a_v} + \frac{d_v^2}{4b_v} - e_v}{b_v}}$, $b = \sqrt{\frac{\frac{c_v^2}{4a_v} + \frac{d_v^2}{4b_v} - e_v}{a_v}}$, $m = -\frac{c_v}{2a_v}$, $n = -\frac{d_v}{2b_v}$.

3.2 Hyberbola

Hyperbola je množina všetkých bodov v rovine, ktoré majú od dvoch pevných bodov (tie ozn. F_1 a F_2) stály rozdiel vzdialeností (ozn. $2a$). Stručne označujeme $H(F_1, F_2, 2a)$. Symbolicky túto definíciu môžeme zapísať nasledovne:

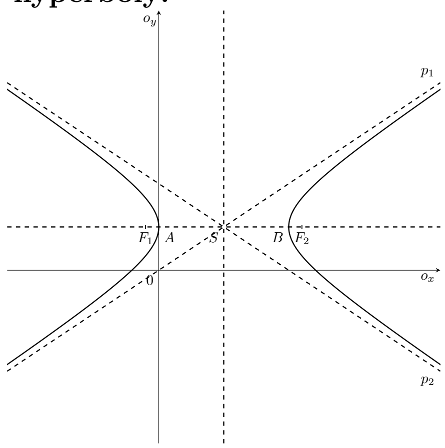
$$||XF_1| - |XF_2|| = 2a, \tag{4}$$

kde F_1 a F_2 sú ohniská elipsy, X je ľubovoľný bod hyperboly.

Základné prvky hyperboly:

S	stred hyperboly
F_1, F_2	ohniská hyperboly
A, B	hlavné vrcholy hyperboly
o_1	hlavná os hyperboly
a	dĺžka hlavnej poloosi
	$a = \lvert AS\rvert = \lvert SB\rvert$
o_2	vedľajšia os hyperboly
b	dĺžka vedľajšej poloosi
e	excentricita
	$e = \lvert F_1S\rvert = \lvert F_2S\rvert$
p_1, p_2	asymptoty hyperboly

Tvar hyperboly:

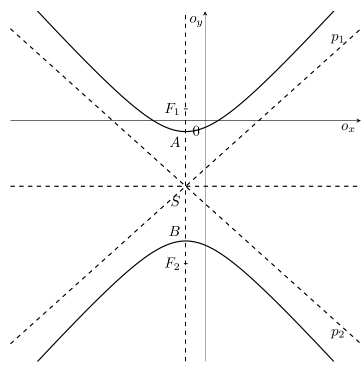


Hyperbola, ktorej ohniská ležia na priamke rovnobežnej s osou x

Stredová rovnica: $\dfrac{(x-m)^2}{a^2} - \dfrac{(y-n)^2}{b^2} = 1$

Stred v bode $S = [m, n]$

a-hlavná poloos, b-vedľajšia poloos



Hyperbola, ktorej ohniská ležia na priamke rovnobežnej s osou y

Stredová rovnica: $-\dfrac{(x-m)^2}{b^2} + \dfrac{(y-n)^2}{a^2} = 1$

Stred v bode $S = [m, n]$

a-hlavná poloos, b-vedľajšia poloos

Na základe 2 vyjadríme a, b, m a n stredovej rovnice hyperboly, pre:

1. hyperbolu, ktorej ohniská ležia na priamke rovnobežnej s osou x:
   $a = \sqrt{\frac{\frac{c_v^2}{4a_v} + \frac{d_v^2}{4b_v} - e_v}{a_v}}$, $b = \sqrt{-\frac{\frac{c_v^2}{4a_v} + \frac{d_v^2}{4b_v} - e_v}{b_v}}$, $m = -\frac{c_v}{2a_v}$, $n = -\frac{d_v}{2b_v}$,
2. hyperbolu, ktorej ohniská ležia na priamke rovnobežnej s osou y:
   $a = \sqrt{\frac{\frac{c_v^2}{4a_v} + \frac{d_v^2}{4b_v} - e_v}{b_v}}$, $b = \sqrt{-\frac{\frac{c_v^2}{4a_v} + \frac{d_v^2}{4b_v} - e_v}{a_v}}$, $m = -\frac{c_v}{2a_v}$, $n = -\frac{d_v}{2b_v}$.

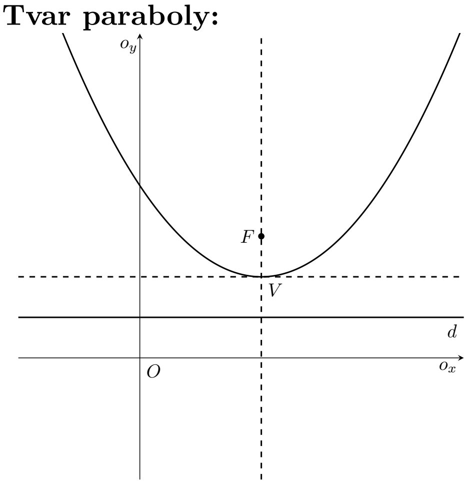
3.3 Parabola

Parabola je množina všetkých bodov v rovine, ktoré majú rovnakú vzdialenosť od pevného bodu F (ohnisko paraboly) a pevnej priamky d (riadiaca priamka). Označujeme $P(F, d)$.

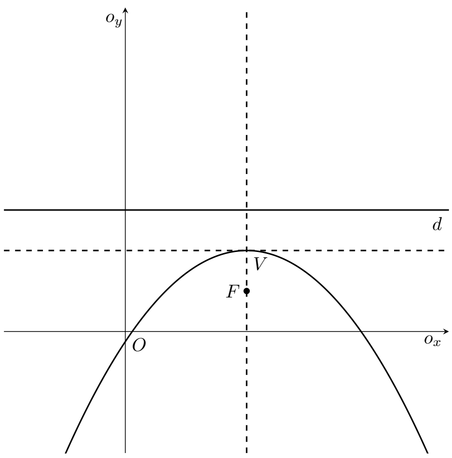
Základné prvky paraboly:

F	je ohnisko paraboly,
d	je riadiaca priamka,
o	je os paraboly, ktorá je kolmá na riadiacu priamku,
V	vrchol paraboly a nachádza sa v strede úsečky FD,
p	je parameter paraboly,
	$p = \|FD\|$
	Je to vzdialenosť ohniska od riadiacej priamky.

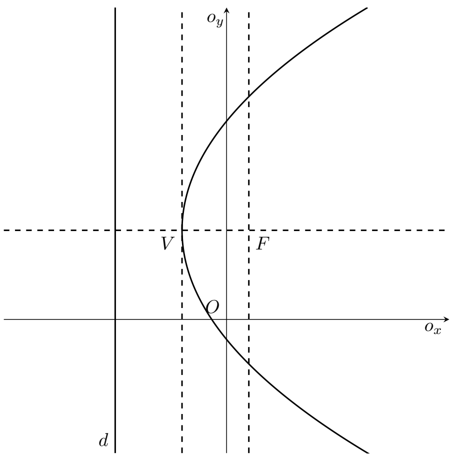
Tvar paraboly:



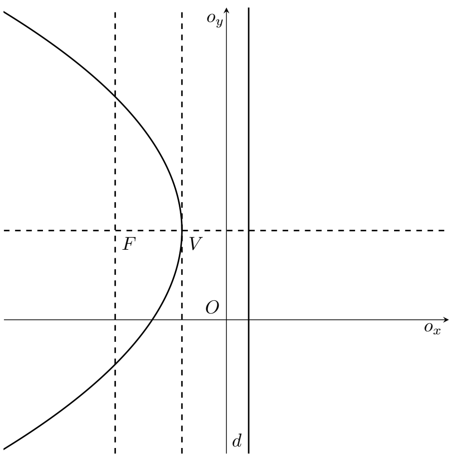
Parabola s rovnicou
$(x - m)^2 = 2p(y - n)$



Parabola s rovnicou
$(x - m)^2 = -2p(y - n)$



Parabola s rovnicou
$(y - n)^2 = 2p(x - m)$



Parabola s rovnicou
$(y - n)^2 = -2p(x - m)$

Prepis všeobecného tvaru kužeľosečky (1) upravíme vzhľadom k tomu, ktorý koeficien je pri danej parabole rovný nule. Máme dve možnosti.

1. Ak je os paraboly rovnobežná s osou y, tak $b_v = 0$:

$$
\begin{aligned}
a_v x^2 + c_v x + d_v y + e_v &= 0 \\
a_v \left(x^2 + \frac{c_v}{a_v} x \right) + d_v y + e_v &= 0 \\
a_v \left[x^2 + \frac{c_v}{a_v} x + \left(\frac{c_v}{2a_v} \right)^2 - \left(\frac{c_v}{2a_v} \right)^2 \right] + d_v y + e_v &= 0 \\
a_v \left(x + \frac{c_v}{2a_v} \right)^2 - a_v \left(\frac{c_v}{2a_v} \right)^2 + d_v y + e_v &= 0 \\
a_v \left(x + \frac{c_v}{2a_v} \right)^2 &= -e_v - d_v y + a_v \left(\frac{c_v}{2a_v} \right)^2 \\
a_v \left(x + \frac{c_v}{2a_v} \right)^2 &= -e_v - d_v y + \frac{c_v^2}{4a_v} \\
a_v \left(x + \frac{c_v}{2a_v} \right)^2 &= -d_v \left(y + \frac{e_v}{d_v} - \frac{c_v^2}{4a_v d_v} \right) \\
\left(x + \frac{c_v}{2a_v} \right)^2 &= -\frac{d_v}{a_v} \left(y + \frac{e_v}{d_v} - \frac{c_v^2}{4a_v d_v} \right)
\end{aligned}
$$

   Potom $m = -\frac{c_v}{2a_v}$, $n = \frac{c_v^2}{4a_v d_v} - \frac{e_v}{d_v}$ a $p = -\frac{d_v}{2a_v}$.

2. Ak je os paraboly rovnobežná s osou x, tak $a_v = 0$:

$$
\begin{aligned}
b_v y^2 + c_v x + d_v y + e_v &= 0 \\
b_v \left(y^2 + \frac{d_v}{b_v} y \right) + c_v x + e_v &= 0 \\
b_v \left[y^2 + \frac{d_v}{b_v} y + \left(\frac{d_v}{2b_v} \right)^2 - \left(\frac{d_v}{2b_v} \right)^2 \right] + c_v x + e_v &= 0 \\
b_v \left(y + \frac{d_v}{2b_v} \right)^2 - b_v \left(\frac{d_v}{2b_v} \right)^2 + c_v x + e_v &= 0 \\
b_v \left(y + \frac{d_v}{2b_v} \right)^2 &= -e_v - c_v x + b_v \left(\frac{d_v}{2b_v} \right)^2 \\
b_v \left(y + \frac{d_v}{2b_v} \right)^2 &= -e_v - c_v x + \frac{d_v^2}{4b_v} \\
b_v \left(y + \frac{d_v}{2b_v} \right)^2 &= -c_v \left(x + \frac{e_v}{c_v} - \frac{d_v^2}{4b_v c_v} \right) \\
\left(y + \frac{d_v}{2b_v} \right)^2 &= -\frac{c_v}{b_v} \left(x + \frac{e_v}{c_v} - \frac{d_v^2}{4b_v c_v} \right)
\end{aligned}
$$

   Potom $m = \frac{d_v^2}{4b_v c_v} - \frac{e_v}{c_v}$,$n = -\frac{d_v}{2b_v}$ a $p = -\frac{c_v}{2b_v}$.

3.4 Postup riešenia v Matlabe

Ako bolo spomenuté, riešime príklady typu:
Daná je všeobecná rovnica kužeľosečky. Určte o akú kužeľosečku ide. Popíšte jej základne charakteristiky (súradnice ohnísk, stredu, hlavných a vedľajších vrcholov) a zobrazte ju. Pre výpočet

príkladov v Matlabe využívame symbolický toolbox, vzhľadom k tomu, že pracujeme s analytickým vyjadrením geometrických útvarov.

Všeobecne riešime tento typ príkladov podľa nasledujúceho postupu:

1. Zavedieme symbolické premenné x a y.

```
syms x y
```

2. Vykreslíme graf funkcie. Pričom rovnica je vo všeobecnom tvare $a_v x^2 + b_v y^2 + c_v x + d_v y + e_v = 0$, kde a_v, b_v, c_v, d_v a e_v sú reálne čísla, aspoň jedno rôzne od nuly.

```
ezplot(rovnica); %rovnica v tvare av*x^2+bv*y^2+cv*x+dv*y+ev==0
```

3. Zmrazíme aktuálny graf, aby sa nám neprekresľoval.

```
hold on;
```

4. Nastavíme zobrazenie mriežky.

```
grid on;
```

5. Na základe zobrazeného grafu, určíme typ kužeľosečky a uložíme príslušné koeficienty všeobecnej rovnice do premenných podľa typu kužeľosečky.

```
av=hodnota; %koeficient av vseobecnej rovnice
bv=hodnota; %koeficient bv vseobecnej rovnice
cv=hodnota; %koeficient cv vseobecnej rovnice
dv=hodnota; %koeficient dv vseobecnej rovnice
ev=hodnota; %koeficient ev vseobecnej rovnice
```

6. Vypočítame jednotlivé premenné stredovej rovnice kužeľosečky, podľa jej typu. Pre elipsu a hyperbolu vypočítavame dĺžky hlavnej a vedľajšej poloosi a súradnice stredu kužeľosečky. Pre parabolu vypočítame súradnice vrcholu a parameter paraboly. Pre každú z kužeľosečiek máme výpočet daný jej tvarom:

```
%ELIPSA
m=-cv/2*av; %x-ova suradnica stredu elipsy
n=-dv/2*bv; %y-ova suradnica stredu elipsy

%Ak ohniska lezia na priamke rovnobeznej s x-ovou osou
a=sqrt((cv^2/(4*av) + (dv^2)/(4*bv) - ev)/av); %dlzka hlavnej poloosi
b=sqrt((cv^2/(4*av) + (dv^2)/(4*bv) - ev)/bv); %dlzka vedlajsej poloosi

%Ak ohniska lezia na priamke rovnobeznej s y-ovou osou
a=sqrt((cv^2/(4*av) + (dv^2)/(4*bv) - ev)/bv); %dlzka hlavnej poloosi
b=sqrt((cv^2/(4*av) + (dv^2)/(4*bv) - ev)/av); %dlzka vedlajsej poloosi
```

```
%HYPERBOLA
m=-cv/2*av; %x-ova suradnica stredu hyperboly
n=-dv/2*bv; %y-ova suradnica stredu hyperboly

%Ak ohniska lezia na priamke rovnobeznej s x-ovou osou
a=sqrt((cv^2/(4*av) + (dv^2)/(4*bv) - ev)/av); %dlzka hlavnej poloosi
b=sqrt(-(cv^2/(4*av) + (dv^2)/(4*bv) - ev)/bv); %dlzka vedlajsej poloosi
```

```
%Ak ohniska lezia na priamke rovnobeznej s y-ovou osou
a=sqrt((cv^2/(4*av) + (dv^2)/(4*bv) - ev)/bv); %dlzka hlavnej poloosi
b=sqrt(-(cv^2/(4*av) + (dv^2)/(4*bv) - ev)/av); %dlzka vedlajsej poloosi
```

```
%PARABOLA

%Ak je os paraboly rovnobezna s osou y
m=-cv/(2*av);
n=cv^2/(4*av*dv)-ev/dv;
p=-dv/(2*av);

%Ak je os paraboly rovnobezna s osou x
m=dv^2/(4*bv*cv)-ev/cv;
m=-dv/(2*bv);
p=-cv/(2*bv);
```

7. Zobrazíme rovnicu kužeľosečky. Využijeme úpravu rovnice pomocou funkcie pretty(), ktorá vzhľadovo upraví tlačený tvar rovnice a funkcie sym(), ktorá prevedie textový reťazec na symbolický výraz:

```
%ELIPSA
%Ak ohniska lezia na priamke rovnobeznej s x-ovou osou.
rovnica=['((x-(' int2str(m) '))^2)/' int2str(a^2) ' +
((y-(' int2str(n) '))^2)/' int2str(b^2) ' = 1'];

%Ak ohniska lezia na priamke rovnobeznej s y-ovou osou.
rovnica=['((x-(' int2str(m) '))^2)/' int2str(b^2) ' +
((y-(' int2str(n) '))^2)/' int2str(a^2) ' = 1'];

pretty(sym(rovnica));
```

```
%HYPERBOLA
%Ak ohniska lezia na priamke rovnobeznej s x-ovou osou.
rovnica=['((x-(' int2str(m) '))^2)/' int2str(a^2) ' -
((y-(' int2str(n) '))^2)/' int2str(b^2) ' = 1'];

%Ak ohniska lezia na priamke rovnobeznej s y-ovou osou.
rovnica=['-((x-(' int2str(m) '))^2)/' int2str(b^2) ' -
((y-(' int2str(n) '))^2)/' int2str(a^2) ' = 1'];

pretty(sym(rovnica));
```

```
%PARABOLA
%Ak je os paraboly rovnobezna s osou y
rovnica=['((x-(' int2str(m) '))^2) = 2 *' num2str(p) '*(y -(' num2str(n) '))'];
pretty(sym(rovnica));

%Ak je os paraboly rovnobezna s osou x
rovnica=['((y-(' int2str(n) '))^2) = 2 *' num2str(p) '*(x -(' num2str(m) '))'];
pretty(sym(rovnica));
```

8. Vyjadríme základné prvky kužeľosečky podľa jej typu:

```
%ELIPSA
S=[m n]; %stred kuzelosecky
e=sqrt(a^2-b^2); %excentricita pri elipse
```

```
%Ak ohniska lezia na priamke rovnobeznej s x-ovou osou
A=[m-a n] %hlavny vrchol kuzelosecky
B=[m+a n] %hlavny vrchol kuzelosecky
C=[m n+b] %vedlajsi vrchol kuzelosecky
D=[m n-b] %vedlajsi vrchol kuzelosecky
F1=[m-e n]; %ohnisko
F2=[m+e n]; %ohnisko

%Ak ohniska lezia na priamke rovnobeznej s y-ovou osou
A=[m n-a] %hlavny vrchol kuzelosecky
B=[m n+a] %hlavny vrchol kuzelosecky
C=[m-b n] %vedlajsi vrchol kuzelosecky
D=[m+b n] %vedlajsi vrchol kuzelosecky
F1=[m n+e]; %ohnisko
F2=[m n-e]; %ohnisko
```

```
%HYPERBOLA
S=[m n]; %stred kuzelosecky
e=sqrt(a^2+b^2); %excentricita pri hyperbole

%Ak ohniska lezia na priamke rovnobeznej s x-ovou osou
A=[m-a n] %hlavny vrchol kuzelosecky
B=[m+a n] %hlavny vrchol kuzelosecky
F1=[m-e n]; %ohnisko
F2=[m+e n]; %ohnisko

%Ak ohniska lezia na priamke rovnobeznej s y-ovou osou
A=[m n+a] %hlavny vrchol kuzelosecky
B=[m n-a] %hlavny vrchol kuzelosecky
F1=[m n+e]; %ohnisko
F2=[m n-e]; %ohnisko
```

```
%PARABOLA
V=[m n]; %vrchol paraboly

%Ak je os paraboly rovnobezna s osou y
F=[m n-p/2]; %ohnisko paraboly

%Ak je os paraboly rovnobezna s osou x
F=[m-p/2 n]; %ohnisko paraboly
```

9. Zobrazíme základné prvky kužeľosečky podľa jej typu:

```
 %ELIPSA
plot(S(:,1),S(:,2),'o'); %stred elipsy
text(S(:,1),S(:,2),'  S');
plot(A(:,1),A(:,2),'o'); %hlavny vrchol elipsy
text(A(:,1),A(:,2),'  A');
plot(B(:,1),B(:,2),'o'); %hlavny vrchol elipsy
text(B(:,1),B(:,2),'  B');
plot(C(:,1),C(:,2),'o'); %vedlajsi vrchol elipsy
text(C(:,1),C(:,2),'  C');
plot(D(:,1),D(:,2),'o'); %vedlajsi vrchol elipsy
text(D(:,1),D(:,2),'  D');
plot(F1(:,1),F1(:,2),'o'); %ohnisko elipsy
text(F1(:,1),F1(:,2),'  F1');
plot(F2(:,1),F2(:,2),'o'); %ohnisko elipsy
text(F2(:,1),F2(:,2),'  F2');
```

```
%HYPERBOLA
plot(S(:,1),S(:,2),'o'); %stred hyperboly
text(S(:,1),S(:,2),'  S');
plot(A(:,1),A(:,2),'o'); %hlavny vrchol hyperboly
text(A(:,1),A(:,2),'  A');
plot(B(:,1),B(:,2),'o'); %hlavny vrchol hyperboly
text(B(:,1),B(:,2),'  B');
plot(F1(:,1),F1(:,2),'o'); %ohnisko hyperboly
text(F1(:,1),F1(:,2),'  F1');
plot(F2(:,1),F2(:,2),'o'); %ohnisko hyperboly
text(F2(:,1),F2(:,2),'  F2');
```

```
%PARABOLA
plot(V(:,1),V(:,2),'o'); %vrchol paraboly
text(V(:,1),V(:,2),'  V');
plot(F(:,1),F(:,2),'o'); %ohnisko paraboly
text(F(:,1),F(:,2),'  F');
```

Výsledkom takéhoto výpočtu v Matlabe je zobrazenie danej kužeľosečky s jej vyznačenými základnými prvkami vo forme obrázku a výpis rovnice kužeľosečky v stredovom tvare. Tento postup demonštrujeme na riešení nasledujúcich príkladoch.

Príklad 1: Daná je všeobecná rovnica kužeľosečky

$$9x^2 + 25y^2 - 54x - 100y - 44 = 0.$$

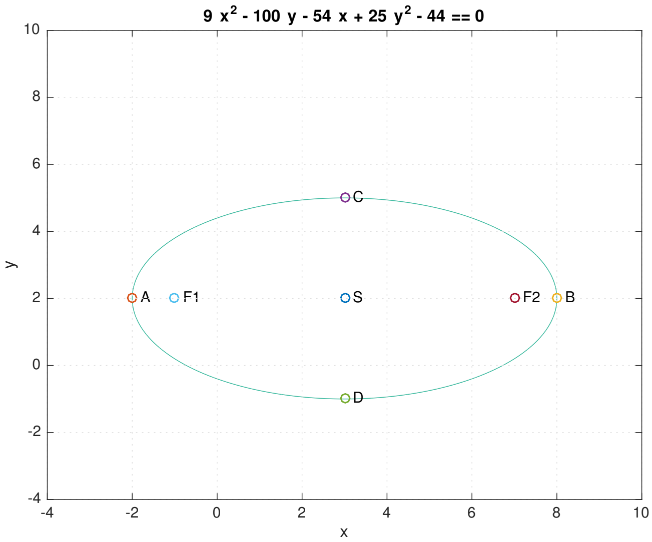
Zistite o aký typ kužeľosečky ide, popíšte jej základné charakteristiky (súradnice ohnísk, stredu, hlavných a vedľajších vrcholov) a načrtnite ju.

Riešenie:

```
syms x y;
ezplot(9*x^2+25*y^2-54*x-100*y-44==0); %vykreslenie kuzelosecky
hold on;
grid on;
av=9;    %koeficient av vseobecnej rovnice
bv=25;   %koeficient bv vseobecnej rovnice
cv=-54;  %koeficient cv vseobecnej rovnice
dv=-100; %koeficient dv vseobecnej rovnice
ev=-44;  %koeficient ev vseobecnej rovnice
m=-cv/(2*av); %x-ova suradnica stredu elipsy
n=-dv/(2*bv); %y-ova suradnica stredu elipsy
a=sqrt((cv^2/(4*av) + (dv^2)/(4*bv) - ev)/av); %dlzka hlavnej poloosi
b=sqrt((cv^2/(4*av) + (dv^2)/(4*bv) - ev)/bv); %dlzka vedlajsej poloosi
rovnica=['((x-(' int2str(m) '))^2)/' int2str(a^2) ' +
((y-(' int2str(n) '))^2)/' int2str(b^2) ' = 1']; %rovnica elipsy
pretty(sym(rovnica)); %vypisanie rovnice elipsy
S=[m n]; %stred elipsy
e=sqrt(a^2-b^2); %excentricita
A=[m-a n];  %hlavny vrchol elipsy
B=[m+a n];  %hlavny vrchol elipsy
C=[m n+b];  %vedlajsi vrchol elipsy
D=[m n-b];  %vedlajsi vrchol elipsy
F1=[m-e n]; %ohnisko elipsy
F2=[m+e n]; %ohnisko elipsy
plot(S(:,1),S(:,2),'o'); %zobrazenie stredu elipsy
text(S(:,1),S(:,2),'  S');
plot(A(:,1),A(:,2),'o'); %zobrazenie hlavneho vrcholu elipsy
text(A(:,1),A(:,2),'  A');
```

```
plot(B(:,1),B(:,2),'o'); %zobrazenie hlavneho vrcholu elipsy
text(B(:,1),B(:,2),'  B');
plot(C(:,1),C(:,2),'o'); %zobrazenie vedlajsieho vrcholu elipsy
text(C(:,1),C(:,2),'  C');
plot(D(:,1),D(:,2),'o'); %zobrazenie vedlajsieho vrcholu elipsy
text(D(:,1),D(:,2),'  D');
plot(F1(:,1),F1(:,2),'o'); %zobrazenie ohniska elipsy
text(F1(:,1),F1(:,2),'  F1');
plot(F2(:,1),F2(:,2),'o'); %zobrazenie ohniska elipsy
text(F2(:,1),F2(:,2),'  F2');
```

Výsledkom príkladu je nasledujúca elipsa s vyznačenými základnými prvkami (Obr. 1) a jej stredová rovnica (Obr. 2).



Obr. 1: Graf kužeľosečky

```
       2        2
(x - 3)  (y - 2)
-------- + -------- == 1
   25        9
```

Obr. 2: Stredová rovnica kužeľosečky

Príklad 2: Daná je všeobecná rovnica kužeľosečky

$$4x^2 + y^2 + 8x + 4y - 8 = 0$$

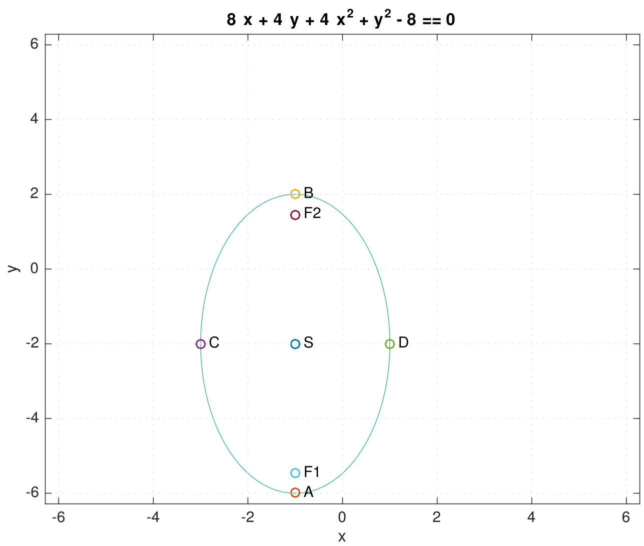
Zistite o aký typ kužeľosečky ide, popíšte jej základné charakteristiky (súradnice ohnísk, stredu, hlavných a vedľajších vrcholov) a načrtnite ju.

Riešenie:

```
syms x y;
ezplot(4*x^2+y^2+8*x+4*y-8==0); %vykreslenie kuzelosecky
hold on;
grid on;
av=4;  %koeficient av vseobecnej rovnice
bv=1;  %koeficient bv vseobecnej rovnice
cv=8;  %koeficient cv vseobecnej rovnice
dv=4;  %koeficient dv vseobecnej rovnice
ev=-8; %koeficient ev vseobecnej rovnice
```

```
m=-cv/(2*av); %x-ova suradnica stredu elipsy
n=-dv/(2*bv); %y-ova suradnica stredu elipsy
a=sqrt((cv^2/(4*av) + (dv^2)/(4*bv) - ev)/bv); %dlzka hlavnej poloosi
b=sqrt((cv^2/(4*av) + (dv^2)/(4*bv) - ev)/av); %dlzka vedlajsej poloosi
rovnica=['((x-(' int2str(m) '))^2)/' int2str(b^2) ' +
((y-(' int2str(n) '))^2)/' int2str(a^2) ' = 1']; %rovnica elipsy
pretty(sym(rovnica)); %vypisanie rovnice elipsy
S=[m n]; %stred elipsy
e=sqrt(a^2-b^2); %excentricita
A=[m n-a];  %hlavny vrchol elipsy
B=[m n+a];  %hlavny vrchol elipsy
C=[m-b n];  %vedlajsi vrchol elipsy
D=[m+b n];  %vedlajsi vrchol elipsy
F1=[m n-e]; %ohnisko elipsy
F2=[m n+e]; %ohnisko elipsy
plot(S(:,1),S(:,2),'o'); %zobrazenie stredu elipsy
text(S(:,1),S(:,2),'  S');
plot(A(:,1),A(:,2),'o'); %zobrazenie hlavneho vrcholu elipsy
text(A(:,1),A(:,2),'  A');
plot(B(:,1),B(:,2),'o'); %zobrazenie hlavneho vrcholu elipsy
text(B(:,1),B(:,2),'  B');
plot(C(:,1),C(:,2),'o'); %zobrazenie vedlajsieho vrcholu elipsy
text(C(:,1),C(:,2),'  C');
plot(D(:,1),D(:,2),'o'); %zobrazenie vedlajsieho vrcholu elipsy
text(D(:,1),D(:,2),'  D');
plot(F1(:,1),F1(:,2),'o'); %zobrazenie ohniska elipsy
text(F1(:,1),F1(:,2),'  F1');
plot(F2(:,1),F2(:,2),'o'); %zobrazenie ohniska elipsy
text(F2(:,1),F2(:,2),'  F2');
```

Výsledkom príkladu je nasledujúca elipsa s vyznačenými základnými prvkami (Obr. 3) a jej stredová rovnica (Obr. 4).



Obr. 3: Graf kužeľosečky

```
       2          2
(x + 1)    (y + 2)
-------- + -------- == 1
   4          16
```

Obr. 4: Stredová rovnica kužeľosečky

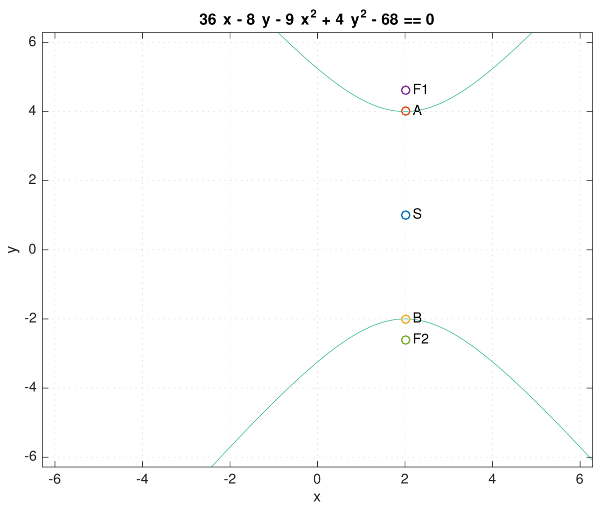
Príklad 3: Daná je všeobecná rovnica kužeľosečky

$$4y^2 - 9x^2 + 36x - 8y - 68 = 0.$$

Zistite o aký typ kužeľosečky ide, popíšte jej základné charakteristiky (súradnice ohnísk, stredu, hlavných a vedľajších vrcholov) a načrtnite ju.

Riešenie:

```
syms x y;
ezplot(4*y^2-9*x^2+36*x-8*y-68==0); %vykreslenie kuzelosecky
hold on;
grid on;
av=-9;   %koeficient av vseobecnej rovnice
bv=4;    %koeficient bv vseobecnej rovnice
cv=36;   %koeficient cv vseobecnej rovnice
dv=-8;   %koeficient dv vseobecnej rovnice
ev=-68;  %koeficient ev vseobecnej rovnice
m=-cv/(2*av); %x-ova suradnica stredu hyperboly
n=-dv/(2*bv); %y-ova suradnica stredu hyperboly
a=sqrt((cv^2/(4*av) + (dv^2)/(4*bv) - ev)/bv); %dlzka hlavnej poloosi
b=sqrt(-(cv^2/(4*av) + (dv^2)/(4*bv) - ev)/av); %dlzka vedlajsej poloosi
rovnica=['-((x-(' int2str(m) '))^2)/' int2str(b^2) ' +
((y-(' int2str(n) '))^2)/' int2str(a^2) ' = 1']; %rovnica hyperboly
pretty(sym(rovnica)); %vypisanie rovnice hyperboly
S=[m n]; %stred hyperboly
e=sqrt(a^2+b^2); %excentricita
A=[m n+a];  %hlavny vrchol hyperboly
B=[m n-a];  %hlavny vrchol hyperboly
F1=[m n+e]; %ohnisko hyperboly
F2=[m n-e]; %ohnisko hyperboly
plot(S(:,1),S(:,2),'o'); %zobrazenie stredu hyperboly
text(S(:,1),S(:,2),'  S');
plot(A(:,1),A(:,2),'o'); %zobrazenie hlavneho vrcholu hyperboly
text(A(:,1),A(:,2),'  A');
plot(B(:,1),B(:,2),'o'); %zobrazenie hlavneho vrcholu hyperboly
text(B(:,1),B(:,2),'  B');
plot(F1(:,1),F1(:,2),'o'); %zobrazenie ohniska hyperboly
text(F1(:,1),F1(:,2),'  F1');
plot(F2(:,1),F2(:,2),'o'); %zobrazenie ohniska hyperboly
text(F2(:,1),F2(:,2),'  F2');
```



Obr. 5: Graf kužeľosečky

```
          2           2
   (y - 1)     (x - 2)
   -------- - -------- == 1
       9           4
```

Obr. 6: Stredová rovnica kužeľosečky

Výsledkom príkladu je nasledujúca hyperbola s vyznačenými základnými prvkami (Obr. 5) a jej stredová rovnica (Obr. 6).

Celý postup riešenia tohto príkladu v Matlabe ako aj teoretický základ k príkladu je zverejnený vo videu na stránke [1].

Príklad 4: Daná je všeobecná rovnica kužeľosečky

$$4x^2 - y^2 - 24x + 4y + 28 = 0.$$

Zistite o aký typ kužeľosečky ide, popíšte jej základné charakteristiky (súradnice ohnísk, stredu, hlavných a vedľajších vrcholov) a načrtnite ju.

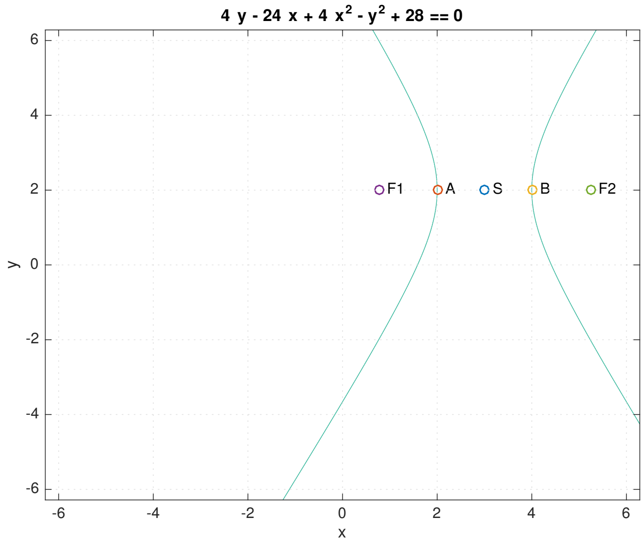
Riešenie:

```
syms x y;
ezplot(4*x^2-y^2-24*x+4*y+28==0); %vykreslenie kuzelosecky
hold on;
grid on;
av=4;    %koeficient av vseobecnej rovnice
bv=-1;   %koeficient bv vseobecnej rovnice
cv=-24;  %koeficient cv vseobecnej rovnice
dv=4;    %koeficient dv vseobecnej rovnice
ev=28;   %koeficient ev vseobecnej rovnice
m=-cv/(2*av); %x-ova suradnica stredu hyperboly
n=-dv/(2*bv); %y-ova suradnica stredu hyperboly
a=sqrt((cv^2/(4*av) + (dv^2)/(4*bv) - ev)/av);  %dlzka hlavnej poloosi
b=sqrt(-(cv^2/(4*av) + (dv^2)/(4*bv) - ev)/bv); %dlzka vedlajsej poloosi
rovnica=['((x-(' int2str(m) '))^2)/' int2str(a^2) ' -
((y-(' int2str(n) '))^2)/' int2str(b^2) ' = 1']; %rovnica hyperboly
pretty(sym(rovnica)); %vypisanie rovnice hyperboly
S=[m n]; %stred hyperboly
e=sqrt(a^2+b^2); %excentricita
A=[m-a n];  %hlavny vrchol hyperboly
B=[m+a n];  %hlavny vrchol hyperboly
F1=[m-e n]; %ohnisko hyperboly
F2=[m+e n]; %ohnisko hyperboly
plot(S(:,1),S(:,2),'o'); %zobrazenie stredu hyperboly
text(S(:,1),S(:,2),'  S');
plot(A(:,1),A(:,2),'o'); %zobrazenie hlavneho vrcholu hyperboly
text(A(:,1),A(:,2),'  A');
plot(B(:,1),B(:,2),'o'); %zobrazenie hlavneho vrcholu hyperboly
text(B(:,1),B(:,2),'  B');
plot(F1(:,1),F1(:,2),'o'); %zobrazenie ohniska hyperboly
text(F1(:,1),F1(:,2),'  F1');
plot(F2(:,1),F2(:,2),'o'); %zobrazenie ohniska hyperboly
text(F2(:,1),F2(:,2),'  F2');
```

Výsledkom príkladu je nasledujúca hyperbola s vyznačenými základnými prvkami (Obr. 8) a jej stredová rovnica (Obr. 7).

```
                     2
        2    (y - 2)
(x - 3)  - --------- == 1
                4
```

Obr. 7: Stredová rovnica kužeľosečky



Obr. 8: Graf kužeľosečky

Príklad 5: Daná je všeobecná rovnica kužeľosečky

$$x^2 + y + 6x + 10 = 0.$$

Zistite o aký typ kužeľosečky ide, popíšte jej základné charakteristiky (súradnice ohnísk, stredu, hlavných a vedľajších vrcholov) a načrtnite ju.

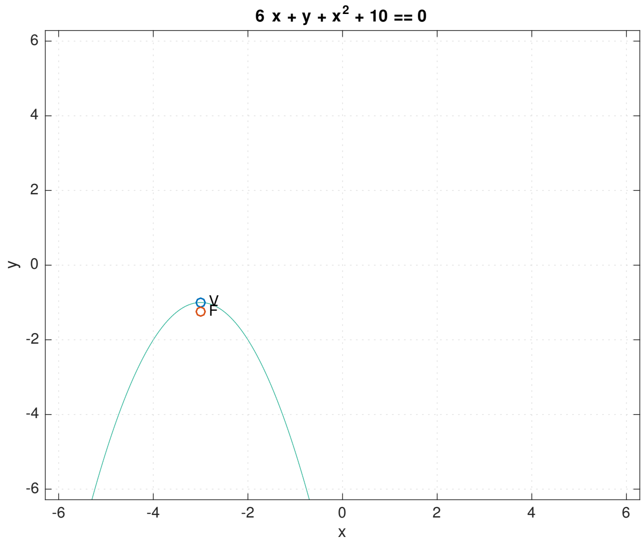
Riešenie:

```
syms x y;
ezplot(x^2+y+6*x+10==0); %vykreslenie kuzelosecky
hold on;
grid on;
av=1;   %koeficient av vseobecnej rovnice
bv=0;   %koeficient bv vseobecnej rovnice
cv=6;   %koeficient cv vseobecnej rovnice
dv=1;   %koeficient dv vseobecnej rovnice
ev=10;  %koeficient ev vseobecnej rovnice
m=-cv/(2*av); %x-ova suradnica vrcholu paraboly
n=cv^2/(4*av*dv)-ev/dv; %y-ova suradnica vrcholu paraboly
p=dv/(2*av); %parameter paraboly
rovnica=['((x-(' int2str(m) '))^2) = -2 *' num2str(p) '*( y -(' num2str(n) '))'];
%rovnica paraboly
pretty(sym(rovnica)); %vypisanie rovnice paraboly
V=[m n]; %vrchol paraboly
F=[m n-p/2]; %ohnisko paraboly
plot(V(:,1),V(:,2),'o'); %zobrazenie vrcholu paraboly
text(V(:,1),V(:,2),'  V');
plot(F(:,1),F(:,2),'o'); %zobrazenie ohniska paraboly
text(F(:,1),F(:,2),'  F');
```

Výsledkom príkladu je nasledujúca parabola s vyznačenými základnými prvkami (Obr. 10) a jej stredová rovnica (Obr. 9).

```
            2
     (x + 3)  == - 1.0 y - 1.0
```

Obr. 9: Stredová rovnica kužeľosečky



Obr. 10: Graf kužeľosečky

Celý postup riešenia tohto príkladu v Matlabe je zverejnený vo videu na stránke [2].

4 Vizualizácia pri funkciách viacerých premenných

Pri funkcii viacerých premenných za nosnú časť považujeme výpočet extrémov funkcie. V tejto časti príspevku sa zameriame len na jednu oblasť a to hľadanie lokálnych extrémov funkcie dvoch premenných.

Hovoríme, že funkcia $f(X)$ dvoch premenných má v bode $A = [a_1, a_2]$ ***ostré lokálne maximum*** (lokálne maximum), ak pre každý bod z okolia bodu A platí

$$f(X) < f(A)(f(X) \leq f(A)). \tag{5}$$

Hovoríme, že funkcia $f(X)$ má v bode $A = [a_1, a_2]$ ***ostré lokálne minimum*** (lokálne minimum), ak pre každý bod z okolia bodu A platí

$$f(X) > f(A)(f(X) \geq f(A)). \tag{6}$$

Nutná podmienka existencie extrému
Nech funkcia $f(x, y)$ dvoch premenných má v bode $A = [a_1, a_2]$ lokálny extrém. Nech existujú parciálne derivácie podľa oboch premenných. Potom

$$\frac{\partial f(A)}{\partial x} = 0 \text{ a } \frac{\partial f(A)}{\partial y} = 0. \tag{7}$$

Stacionárnym bodom je bod, v ktorom sa obe parciálne derivácie rovnajú nule.

Pri hľadaní lokálnych extrémov funkcie dvoch premenných štandardným výpočtom postupujeme podľa nasledujúceho algoritmu:

1. Určiť definičný obor funkcie.
2. Vypočítať prvé derivácie funkcie podľa premennej x a podľa premennej y, t.j.
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \text{ a } \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}.$$
3. Vytvoriť sústavu rovníc, dvoch rovníc s dvoma neznámymi tak, že prvú deriváciu funkcie podľa premennej x položíme rovnú nule a prvú deriváciu funkcie podľa premennej y položíme rovné nule:
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0$$
4. Ak má takáto sústava riešenie, je ním usporiadaná dvojica čísel $[x, y]$. Táto usporiadaná dvojica čísel tvorí súradnice stacionárneho bodu (Riešením sústavy môže byť niekoľko stacionárnych bodov. Každý z nich je daný ako usporiadaná dvojica). Zápis: $SB = [x, y]$.
5. Vypočítať druhé parciálne derivácie podľa premenných x a y:
$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial xy}, \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial yx} \text{ a } \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}.$$
6. Do predpisov funkcií $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial xy}, \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial yx}, \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$ dosadiť súradnice každého stacionárneho bodu.
7. Na základe postačujúcej podmienky existencie lokálneho extrému vypočítať príslušné determinanty: $D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(SB)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(SB)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(SB)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(SB)}{\partial y^2} \end{vmatrix}$
   (a) Ak $D > 0$, tak v stacionárnom bode $SB = [x, y]$ je extrém.
      i. Ak $\frac{\partial^2 f(SB)}{\partial x^2} > 0$, tak v bode $SB = [x, y]$ je lokálne minimum.
      ii. Ak $\frac{\partial^2 f(SB)}{\partial x^2} < 0$, tak v bode $SB = [x, y]$ je lokálne maximum.
   (b) Ak $D < 0$, tak v stacionárnom bode $SB = [x, y]$ extrém nie je.
   (c) Ak $D = 0$, tak o existencii extrému v stacionárnom bode $SB = [x, y]$ nevieme rozhodnúť na základe postačujúcej podmienky.
8. Vypočítať funkčnú hodnotu funkcie $f(x, y)$ v každom stacionárnom bode.

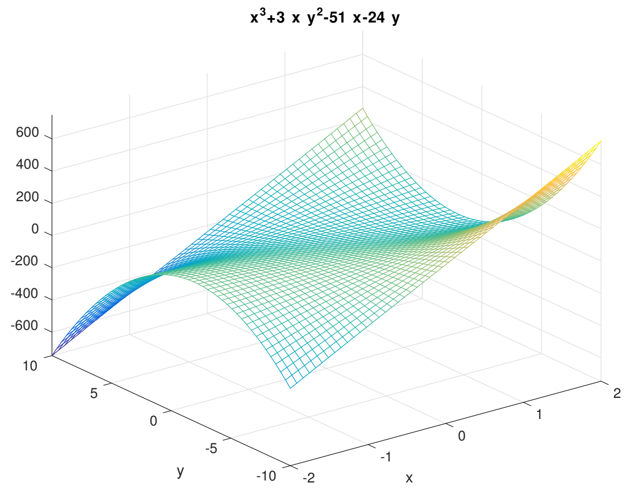
4.1 Hľadanie lokálnych extrémov funkcie dvoch premenných v Matlabe

Hľadanie lokálnych extrémov funkcie dvoch premenných v Matlabe ukážeme na komplexnom príklade.

Príklad: Nájdite lokálne extrémy funkcie
$$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 51x - 24y.$$

Riešenie:
K výpočtu použijeme symbolický toolbox. Najprv si zadefinujem funkciu, ktorú následne vizualizujeme pomocou funkcie ezmesh.

```
syms x y;   % definicia symbolickych premennych
f_xy = @(x,y) x^3+3*x*y^2-51*x-24*y; % definicia funkcie
%vizualizacia funkcie na mriezke
ezmesh(f_xy,[-2 2],[-10 10],50);  % f_xy - funkcia,  [-2,2] - hodnoty x,
                                  % [-10,10] - hodnoty y, 50 - hustota mriezky
```



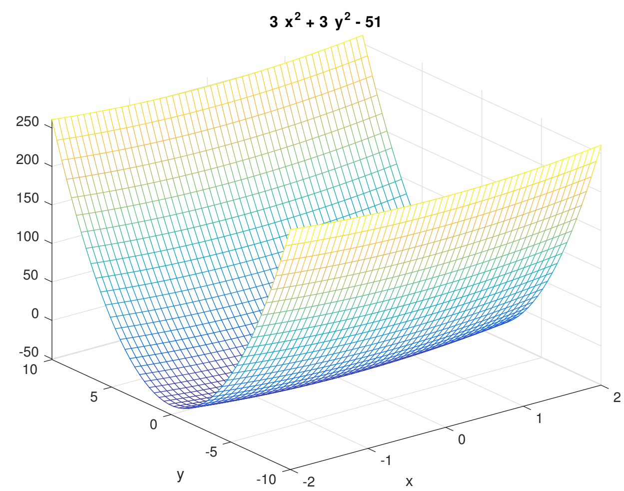
Obr. 11: Graf funkcie

Následne vypočítame derivácie funkcie podľa premennej x a podľa premennej y s využitím funkcie diff(), ktorých grafy zobrazíme:

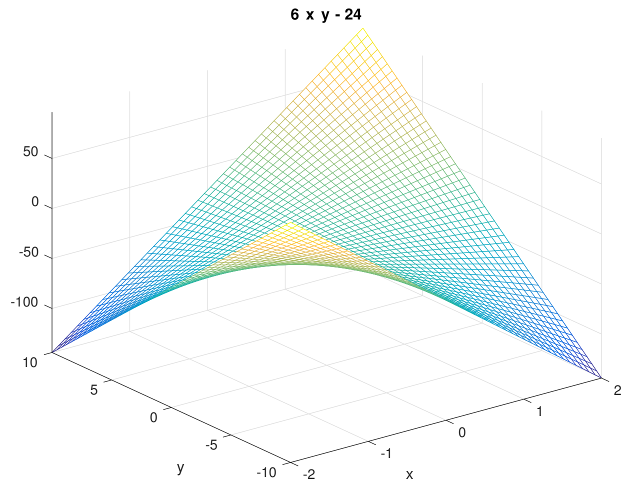
```
f_d1x = diff(f_xy,x,1);  %prva derivacia podla x
f_d1y = diff(f_xy,y,1);  %prva derivacia podla y

%vizualizacia prvej derivacie funkcie podla x na mriezke
ezmesh(f_d1x,[-2 2],[-10 10],50);  % f_xy - funkcia,  [-2,2] - hodnoty x,
                                  % [-10,10] - hodnoty y, 50 - hustota mriezky

%vizualizacia prvej derivacie funkcie podla y na mriezke
ezmesh(f_d1y,[-2 2],[-10 10],50);  % f_xy - funkcia,  [-2,2] - hodnoty x,
                                  % [-10,10] - hodnoty y, 50 - hustota mriezky
```



Obr. 12: Graf prvej derivácie podľa x



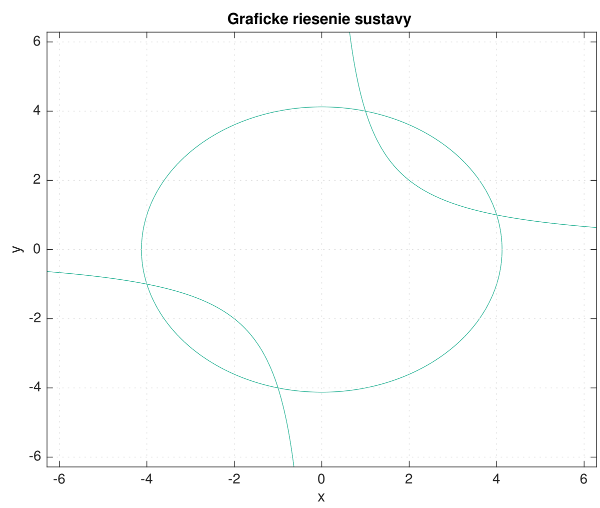
Obr. 13: Graf prvej derivácie podľa y

Prvé derivácie položíme rovné nule a vytvorime sústavu dvoch rovníc s dvoma neznámymi. Sústavu riešime funkciou solve().

```
s_xy = solve(f_d1x,f_d1y)
```

Toto riešenie graficky zobrazíme.

```
fdyplot = ezplot(f_d1x);
hold on
fdyplot = ezplot(f_d1y);
grid
title('Graficke riesenie sustavy ')
```



Obr. 14: Graficke riesenie sustavy

Riešením sústavy sú štyri stacionárne body, tie uložíme do premennej SB:

```
SB = [s_xy.x, s_xy.y]
```

S využitím postačujúcej podmienky overíme, či v týchto stacionárnych bodoch je lokálny extrém. Vypočítame $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial xy}$, $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial yx}$ a $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$:

```
f_d2x=diff(f_xy,x,2);  %druha derivacia podla x
f_d2xy=diff(f_d1y, x,1); %zmiesana derivacia podla x a y
f_d2yx=diff(f_d1x, y,1); %zmiesana derivacia podla y a x
f_d2yy=diff(f_xy,y,2); %druha derivacia podla y
```

Následne zostavíme determinant $D = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f(SB)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f(SB)}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f(SB)}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f(SB)}{\partial y^2} \end{vmatrix}$

```
D = [f_d2x f_d2xy; f_d2yx f_d2y];
```

Vypočítame determinanty pre jednotlivé stacionárne body:

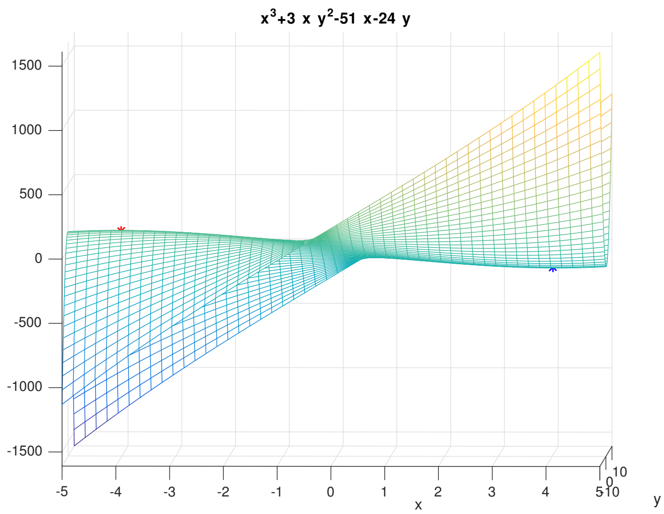
```
D_SB1_det  = det(subs(D,{x, y}, SB(1,:)));
D_SB2_det  = det(subs(D,{x, y}, SB(2,:)));
D_SB3_det  = det(subs(D,{x, y}, SB(3,:)));
D_SB4_det  = det(subs(D,{x, y}, SB(4,:)));
```

Na základe výsledkov je zjavné, že extrém existuje v druhom a treťom bode. To aký typ extrému v daných bodoch máme, zistíme:

```
h_SB2=subs((diff(f_xy,x,2)),{x,y},SB(2,:));
h_SB3=subs((diff(f_xy,x,2)),{x,y},SB(3,:));
```

V druhom bode je lokálne maximum a v treťom bode lokálne minimum.

Zobrazíme funkciu, vypočítame funkčné hodnoty nájdeného lokálneho maxima a minima a zobrazíme ich na grafe funkcie:



Obr. 15: Graf funkcie s lokálnym maximom a minimom

```
ezmesh(f_xy,[-5 5],[-10 10],50);   % zobrazenie grafu funkcie
hold on;

f_xy_SB2 = subs(f_xy, {x, y},SB(2,:)); %funkcna hodnota lokalneho maxima
f_xy_SB3 = subs(f_xy, {x, y},SB(3,:));  %funkcna hodnota lokalneho minima

plot3(SB(2,1), SB(2,2), f_xy_SB2, 'r*'); %vykreslenie lokalneho maxima na grafe
plot3(SB(3,1), SB(3,2), f_xy_SB3, 'b*'); %vykreslenie lokalneho minima na grafe
```

Celý postup riešenia tohto príkladu v Matlabe s je zverejnený vo videu na stránke [3] .

5 Komplexné riešenie vizualizácie v kurze Matematika 2

Ako bolo spomenuté kurz Matematika 2 je členený do nosných oblasti a to Analytická geometria a Funkcia dvoch premenných. Pre tento predmet boli vytvorené rozsiahle výučbové materiály, ktoré zahŕňajú prednášky vo forme prezentácií a video záznamu z prednášok, zbierka riešených príkladov vo forme blogu, pracovné listy, učebnicu Matematika 2 v tlačenej podobe. Vzhľadom na rozoberanú problematiku je nevyhnutné jednotlivé pojmy vizualizovať aby ich osvojenie nebolo formálne. Pre tieto účely boli vytvorené videá simulácií riešenia príkladov v Matlabe, ktoré pokrývajú obsah kurzu.

Boli vytvorené nasledujúce simulácie príkladov:

1. Vektory v 2D a 3D.
2. Sústavy súradnic.
3. Lineárne útvary v 2D.
4. Lineárne útvary v 3D.
5. Kvadratické útvary v 2D, kužeľosečky.
6. Funkcia dvoch premenných.
7. Limita funkcie funkcie dvoch premenných. Spojitosť funkcie dvoch premenných.
8. Parciálne derivácie prvého a druhého rádu.
9. Lokálne extrémy funkcie dvoch premenných.
10. Viazané extrémy funkcie dvoch premenných.
11. Globálne extrémy funkcie dvoch premenných.
12. Gradient a derivácia v smere.
13. Diferenciálne rovnice.

Všetky tieto videá sú voľne prístupné na stránke `http://web.tuke.sk/fberg-blended/mat2/matlab.html`.

6 Záver

V tomto príspevku sme ponúkli možnosti využitia prostriedku Matlab pri vyučovaní predmetov s matematickým obsahom. Ako je známe, k hlbšiemu pochopeniu jednotlivých pojmov dochádza, ak sú tieto pojmy demonštrované aj vo vizuálnej podobe. Z obsahu kurzu Matematika 2 sme vybrali dve rozsiahle témy a to konkrétne Kvadratické útvary v 2D a Vyšetrovanie lokálnych extrémov funkcie dvoch premenných, pričom jednotlivé kroky výpočtu týchto úloh sú teoreticky popísané a následne vizualizované. Pre daný kurz bolo vytvorené komplexné riešenie vo forme videí so simulácií riešenia príkladov v Matlabe, ktoré pokrývajú celý obsah kurzu. Tieto videá sú voľne dostupné nielen študentom fakulty Baníctva, ekológie, riadenia a geotechnológií Technickej univerzity v Košiciach, ale aj pre širokú verejnosť. Videá vhodne dopĺňajú študijné materiály vytvorené pre tento kurz. Študenti tak majú možnosť overiť si svoje získané vedomosti aj v Matlabe a zároveň pochopiť vizuálnu podobu riešenia týchto príkladov.

Poďakovanie: Tento príspevok vznikol s podporou grantov VEGA č. 1/0529/15 a č. 1/0908/15, a bol podporovaný Agentúrou na podporu výskumu a vývoja na základe zmluvy č. APVV-14-0892.

Literatúra

[1] V. Nežníková. Kvadratické útvary v 2d, kužeľosečky. `http://web.tuke.sk/fberg-blended/simulacie2/S5b.mp4`, 2016.

[2] V. Nežníková. Kvadratické útvary v 2d, kužeľosečky. `http://web.tuke.sk/fberg-blended/simulacie2/S5c.mp4`, 2016.

[3] J. Pócsova and T. Škovránek. Lokálne extrémy funkcie dvoch premenných. `http://web.tuke.sk/fberg-blended/simulacie2/S10.mov`, 2016.

[4] K. L. Vavra, V. Janjic-Watrich, L. M. Phillips K. Loerke, S. P. Norris, and J. Macnab. Visualization in science education. *Alberta Science Education Journal*, 41(1):22–30, 2011.

Author1
B. Němcovej 3, 042 00 Košice, Slovenská Republika
e-mail:andrea.mojzisova@tuke.sk

Author2
B. Němcovej 3, 042 00 Košice, Slovenská Republika
e-mail:jana.pocsova@tuke.sk